Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

76. BAND, 4. (SCHLUSS-)HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 25. SEPTEMBER 1961)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1961

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e.V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,

R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Math. Inst. d. Universität, Portania.

F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,

H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21b.

Springer-Verlag OHG

Berlin-Wilmersdorf, Heidelberger Platz 3, Fernsprecher 83 03 01, Fernschreibnummer 01-83 319

Heidelberg 1, Postfach 3027, Fernsprecher 27901, Fernschreibnummer 04-61723

Göttingen, Weender Straße 60.

---

76. Band **Inhalt** 4. (Schluß-(Heft

Seite

André, J., Über Parallelstrukturen. Teil IV: T-Strukturen 311
Leichtweiss, K., Zur Riemannschen Geometrie in Grassmannschen Mannigfaltigkeiten 334
Behrens, E.-A., Distributiv darstellbare Ringe. II 367
Sabidussi, G., Graph Derivatives 385
Schmidt, H., Zur Charakterisierung der zyklischen Funktionen durch eine Funktionalgleichung 402
Cartwright, M. L., and E. F. Collingwood, The radial limits of functions meromorphic in a circular disc 404
Wagner, A., On collineation groups of projective spaces. I 411
Haken, W., Ein Verfahren zur Aufspaltung einer 3-Mannigfaltigkeit in irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten 427
Bierlein, D., Der Graph meßbarer Funktionen mit abstraktem Definitionsbereich . 468

André, J.
Math. Zeitschr. 76, 311—333 (1961)

Über Parallelstrukturen *)

Teil IV: T-Strukturen[1])

Von
Johannes André

Einleitung

Als T-Struktur definierten wir in III, §1 eine affine Parallelstruktur (a.P.), deren Translationen alle zentral sind und in der es in jeder Richtung mindestens eine nichtidentische Translation gibt. Die zentralen Translationsstrukturen (z.T.; vgl. II, §2) sind Beispiele von T-Strukturen.

Da jede T-Struktur auch t-Struktur ist, gelten alle in III gebrachten Sätze auch für T-Strukturen. So ist insbesondere jede T-Struktur translationstreu über einer (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmten z.T., ihrem Stamm. Wir wollen jetzt folgendes Problem genauer untersuchen: *Gegeben sei eine z.T. t, gesucht ist eine vollständige Übersicht über alle T-Strukturen, die translationstreue Erweiterungen von t sind.* In III sind einige translationstreue Erweiterungen von t gebildet worden; diese, wie etwa die freien translationstreuen Erweiterungsebenen (III, §§3 bis 6) sind aber keine T-Strukturen. Nunmehr werden wir ein Verfahren angeben, durch das wir *alle* translationstreuen Erweiterungen von t aufstellen können, soweit sie T-Strukturen sind. Wir müssen hierzu aus einer (endlichen oder unendlichen) Anzahl paarweise isomorpher disjunkt liegender z.T. die T-Strukturen zusammenbauen; das wird in §2 durchgeführt. Wesentliches Hilfsmittel hierfür ist eine „Matrix" von Abbildungen der Geradenmenge des Stammes auf sich oder die leere Menge, die „Matrix der kanonischen Abbildungen". Ehe wir diese Konstruktion durchführen, gehen wir in §1 den umgekehrten Weg und fragen, in welcher Beziehung die von einer vorgegebenen T-Struktur induzierten z.T. (III, §2, Ziffer 2) untereinander stehen. Wesentliches Hilfsmittel sind auch hier die kanonischen Abbildungen. Die Untersuchung der T-Strukturen wird damit zurückgeführt auf die der z.T. und der kanonischen Abbildungen. Die Ergebnisse werden dazu benutzt, um in §3 allgemeine Sätze über T-Strukturen, insbesondere über deren Kollineationsgruppen, herzuleiten.

Die letzten beiden Paragraphen bringen spezielle Beispiele und Anwendungen der vorher gebrachten Theorie, auch auf affine Ebenen. Es wird gezeigt, daß es T-Strukturen mit genau zwei Transitivitätsgebieten hinsichtlich der Translationsgruppe nicht geben kann. Dagegen existieren T-Strukturen

*) Teil einer von der Naturwissenschaftlich-Philosophischen Fakultät der Technischen Hochschule Braunschweig angenommenen Habilitationsschrift.

[1]) Teil I, Math. Z. **76**, 85—102, Teil II, Math. Z. **76**, 155—163, Teil III, Math. Z. **76**, 240—256 (1961); im folgenden hier mit I, II bzw. III zitiert.

mit genau drei Transitivitätsgebieten; Beispiele hierfür werden in §4 angegeben, insbesondere werden noch einige nähere Angaben gemacht über Anzahl der Punkte und Geraden der kleinsten bisher bekannten T-Struktur, die keine Translationsstruktur ist. Schließlich wird noch gezeigt, daß es endliche T-Ebenen (das sind T-Strukturen, die zugleich affine Ebenen sind) mit genau zwei Transitivitätsgebieten hinsichtlich der von den Translationen und Streckungen erzeugten Gruppe nicht geben kann [vgl. auch ANDRÉ (1958)]; das ist ein Spezialfall eines allgemeinen Satzes über die Nichtexistenz bestimmter endlicher T-Strukturen (Satz 5.2). Es ist anzunehmen, daß die hier gebrachten Beweismethoden auch noch weitere Aussagen über T-Ebenen liefern können.

Die Kenntnis der §§3 bis 6 von III wird für diesen Teil nicht vorausgesetzt.

§1. Die kanonischen Abbildungen

1. Sei $\mathfrak{p}=(P, \mathfrak{G})$ eine T-Struktur, d.h. eine t-Struktur mit nichtidentischen Translationen in jeder Richtung. Durch ihre Translationsgruppe T wird P in $|I|$ Transitivitätsgebiete T_i $(i \in I)$ zerlegt. Die durch $\mathfrak{p}$ auf T_i induzierten z.T. (III, §2, Ziffer 2) seien $t_i=(T_i, \mathfrak{L}_i)$. Nach III, Satz 2.3, sind sie zum Stamm $t=(T, \mathfrak{L})$ isomorph[2]). Ferner sei ι_i ein (für das folgende festgehaltener) kanonischer Isomorphismus von t auf t_i [vgl. III, (2.4)]. Die Spur $G \cap T_i$ einer Geraden $G \in \mathfrak{G}$ besteht nach III, Satz 2.2, aus mindestens zwei Punkten.

Sei $L \in \mathfrak{L}$, ihr Bild $L_i=L^{\iota_i} \in \mathfrak{L}_i$ ist Spur einer eindeutig bestimmten Geraden $L^i \in \mathfrak{G}$, d.h. es gilt $L_i=L^i \cap T_i$ (vgl. III, §2, Ziffer 2). Wir definieren jetzt auf $\mathfrak{L}$ eine Abbildung $\varkappa_{ij}$ $(i, j \in I)$ durch

$$L^{\varkappa_{ij}} = (L^i \cap T_j)^{\iota_j^{-1}} \tag{1.1}$$

und nennen $\varkappa_{ij}$ eine *kanonische Abbildung*.

2. Ehe wir die kennzeichnenden Eigenschaften der kanonischen Abbildungen aufstellen, müssen wir noch einen Begriff einführen, der — wie wir später sehen werden — im gewissen Sinne als eine Verallgemeinerung der Partition aufgefaßt werden kann.

DEFINITION. Eine *Zerlegung* $\mathfrak{Z}$ einer z.T. $t=(T, \mathfrak{L})$ ist eine Menge paarweise windschiefer Geraden von t, die ganz T überdecken[3]).

Durch jeden Punkt von t geht also genau eine Gerade von $\mathfrak{Z}$, und zwei verschiedene Geraden aus $\mathfrak{Z}$ sind nicht zueinander parallel. Mit $\mathfrak{Z}$ ist auch $\mathfrak{Z}^\gamma$ eine Zerlegung (wobei γ eine Kollineation von t ist). Ferner gilt der folgende nützliche

SATZ 1.1. *Jede Zerlegung enthält mindestens drei Geraden.*

BEWEIS. Zunächst folgt aus Axiom (a 3) für a.P., daß eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von t (falls eine solche überhaupt existiert) mindestens zwei Geraden L und L' enthält. Sei $p \in L'$; ein von p verschiedener Punkt $q \in \langle L \| p \rangle$ (zur Definition

[2]) Die Punktmenge T von t stimmt natürlich mit T überein (vgl. die Definition des Stammes in III, §2); die Abänderung erfolgt lediglich aus Gründen der einheitlichen Bezeichnung, vgl. hierzu die in Ziffer 4 der Einleitung von I gemachten Bemerkungen.

[3]) *Beispiele* von Zerlegungen werden in §4 gebracht.

von $\langle L \| p \rangle$ s. I, §2, Ziffer 2) existiert nach (t 2) und gehört weder zu L noch zu L'. Die durch q gehende Gerade $L'' \in \mathfrak{Z}$ ist eine gewünschte dritte Gerade.

3. Nunmehr stellen wir einige Eigenschaften der kanonischen Abbildungen zusammen (von denen im nächsten Paragraphen gezeigt wird, daß sie für diese Abbildungen kennzeichnend sind).

SATZ 1.2. *Die durch* (1.1) *definierten kanonischen Abbildungen* $\varkappa_{ij}$ $(i, j \in I)$ *einer z.T.* $t = (T, \mathfrak{L})$ *genügen den folgenden Bedingungen:*

(I) $L^{\varkappa_{ij}}$ *ist entweder leer oder eine zu* L *parallele Gerade aus* $\mathfrak{L}$.

(II) *Für alle* $L \in \mathfrak{L}$ *und* $i \in I$ *gilt* $L^{\varkappa_{ii}} = L$ (d.h. $\varkappa_{ii} = \underline{1}$).

(III) *Aus* $L^{\varkappa_{ij}} \neq \emptyset$ *folgt* $L^{\varkappa_{ij}\varkappa_{jk}} = L^{\varkappa_{ik}}$ $(i, j, k \in I)$.

(IV) *Jedes* $\varkappa_{ij}$ *ist mit jeder Translation* τ *von* t *vertauschbar:* $\varkappa_{ij}\tau = \tau\varkappa_{ij}$.

(V) *Ist* $\mathfrak{P}$ *die Menge aller durch einen festen Punkt gehenden Geraden von* t, *so stellt* $\mathfrak{P}^{\varkappa_{ij}}$ *für* $i \neq j$ *eine Zerlegung von* t *dar*[4]).

(VI) *Zu jeder auf* I *regulären Permutation*[5]) $\varrho \neq \underline{1}$ *und jeder Streckung* σ *von* t *gibt es* $i, j \in I$ *mit* $\varkappa_i \varrho_j \varrho \neq \sigma^{-1}\varkappa_{ij}\sigma$.

BEWEIS. Sei T die Translationsgruppe von $p = (P, \mathfrak{G})$; wir können und wollen sie mit der von t identifizieren, denn p ist als translationstreu über t vorausgesetzt. Wir beweisen jetzt nacheinander die Richtigkeit der Bedingungen (I) bis (VI).

(I): Wegen (1.1) gilt dann genau $L^{\varkappa_{ij}} \neq \emptyset$, wenn $L^i \cap T_j \neq \emptyset$ $(i, j \in I)$ ist; dies wollen wir jetzt voraussetzen. Wenn $\tau \in \mathsf{T}(L^i)$ genommen wird, also $L^{i\tau} = L^i$ und dann ebenso $L^\tau = L$ gilt, so folgt $L^{\varkappa_{ij}\tau} = (L^i \cap T_j)^{\iota_j^{-1}\tau} = (L^i \cap T_j)^{\tau\iota_j^{-1}} = (L^i \cap T_j)^{\iota_j^{-1}} = L^{\varkappa_{ij}}$, somit $L^{\varkappa_{ij}} \| L$, da ja t eine z.T. ist (vgl. II, §2). Die benutzte Vertauschbarkeit von ι_i^{-1} mit τ folgt aus $\iota_i\tau = \tau\iota_i$ und diese Beziehung aus der Definition des kanonischen Isomorphismus ι_i [vgl. III, (2.4)], denn für jedes $t \in T$ gilt $t = o^{\bar{t}}$ [wobei $\bar{t}$ die t zugeordnete Translation vermöge des zwischen T und T bestehenden Isomorphismus ist, vgl. II, §1, Ziffer 2, insbesondere (1.1)], also ($o^{\iota_i} = o_i$ gesetzt) $t^{\iota_i} = o_i^{\bar{t}}$, $t^{\iota_i\tau} = o_i^{\bar{t}\tau} = o_i^{\overline{t^\tau}} = t^{\tau\iota_i}$.

(II) folgt aus $L^{\varkappa_{ii}} = (L^i \cap T_i)^{\iota_i^{-1}} = L^{\iota_i^{-1}} = L$.

(III): Wir setzen $L^{\varkappa_{ij}} \neq \emptyset$, also $L^i \cap T_j \neq \emptyset$ voraus, erhalten $L^i = \big((L^i \cap T_j)^{\iota_j^{-1}}\big)^j = L^{\varkappa_{ij}j}$ und hieraus schließlich $L^{\varkappa_{ij}\varkappa_{jk}} = (L^{\varkappa_{ij}j} \cap T_k)^{\iota_k^{-1}} = (L^i \cap T_k)^{\iota_k^{-1}} = L^{\varkappa_{ik}}$.

(IV) schließt man ähnlich wie (I): $L^{\varkappa_{ij}\tau} = (L^i \cap T_j)^{\iota_j^{-1}\tau} = (L^i \cap T_j)^{\tau\iota_j^{-1}} = (L^{i\tau} \cap T_j)^{\iota_j^{-1}} = (L^{\tau i} \cap T_j)^{\iota_j^{-1}} = L^{\tau\varkappa_{ij}}$.

(V): Wir müssen zeigen, daß $\mathfrak{P}^{\varkappa_{ij}}$ für $i \neq j$ die Eigenschaften einer Zerlegung hat.

---

[4]) Hierbei ist $\mathfrak{P}^{\varkappa_{ij}}$ als die Menge derjenigen $L^{\varkappa_{ij}}$ $(L \in \mathfrak{P})$ definiert, *die nicht leer sind.* Diese Definition, die von der üblichen [nach der auch $\emptyset$ zu $\mathfrak{P}^{\varkappa_{ij}}$ gehören würde, wie man aus (I) leicht herleiten kann] etwas abweicht, erweist sich im folgenden als zweckmäßig.

[5]) Eine Permutation ϱ auf I heißt *regulär*, wenn jede Potenz ϱ^n von ϱ alle oder kein Element von I festläßt [ZASSENHAUS (1937), S. 35]. Ist I endlich, so ist ϱ genau dann regulär, wenn alle ihre Zyklen die gleiche Länge haben.

(a) Seien $p, q \in T$ und $\mathfrak{P}$ die Menge aller durch p gehenden Geraden aus $\mathfrak{L}$; ferner sei $p^{\iota_i} = p_i$ und $q^{\iota_j} = q_j$ gesetzt; wegen $i \neq j$ ist $p_i \neq q_j$. Die Spur $\langle p_i, q_j \rangle_p \cap T_i$ von $\langle p_i, q_j \rangle_p$ auf T_i enthält mindestens zwei Punkte, denn p ist T-Struktur. Somit ist $L = (\langle p_i, q_j \rangle_p \cap T_i)^{\iota_i^{-1}}$ eine Gerade aus $\mathfrak{L}$. Wegen $p \in L$ ist $L \in \mathfrak{P}$, und aus $\langle p_i, q_j \rangle_p = L^i$ folgt, daß $L^{\varkappa_{ij}} = (\langle p_i, q_j \rangle_p \cap T_j)^{\iota_j^{-1}}$ eine durch q gehende Gerade aus $\mathfrak{P}^{\varkappa_{ij}}$ ist.

(b) Sei nun umgekehrt $q \in L' \in \mathfrak{P}^{\varkappa_{ij}}$; dann gibt es ein $L'' \in \mathfrak{P}$ mit $L' = L''^{\varkappa_{ij}} = (L''^{i} \cap T_j)^{\iota_j^{-1}}$. Wegen $p \in L''$ und $q \in L'$ sind $p_i, q_j \in L''^{i}$, also gilt $L''^{i} = \langle p_i, q_j \rangle_p = L^i$, $L'' = L$, $L' = L^{\varkappa_{ij}}$; damit ist gezeigt, daß nur eine Gerade aus $\mathfrak{P}^{\varkappa_{ij}}$ durch q geht.

(c) Seien $L^{\varkappa_{ij}}$ und $L'^{\varkappa_{ij}}$ zwei verschiedene Geraden aus $\mathfrak{P}^{\varkappa_{ij}}$. Wegen $p \in L$, L' und $L \neq L'$ ist $L \nparallel L'$. Aus (II), (III) und (I) folgt $L = L^{\varkappa_{ii}} = L^{\varkappa_{ij}\varkappa_{ji}} \| L^{\varkappa_{ij}}$, ebenso $L' \| L^{\varkappa_{ij}}$, hieraus $L^{\varkappa_{ij}} \nparallel L'^{\varkappa_{ij}}$.

Damit sind für $\mathfrak{P}^{\varkappa_{ij}}$ alle Eigenschaften einer Zerlegung von t nachgewiesen.

(VI): Nehmen wir an, (VI) sei nicht erfüllt. Dann gibt es eine auf I reguläre Permutation $\varrho \neq \underline{1}$ und eine Streckung σ von t derart, daß $\varkappa_{i^\varrho j^\varrho} = \sigma^{-1} \varkappa_{ij} \sigma$ für alle $i, j \in I$ gilt. Wir zeigen zunächst, daß die durch

$$t_j^{\varrho^*} = t^{j^\varrho \varrho^*} = t^{\sigma \bar{j}} \qquad (t \in T,\ j \in I,\ \bar{j} = j^\varrho \text{ gesetzt}) \tag{1.2}$$

auf P definierte Abbildung ϱ^* in p eine Translation darstellt. Aus der Definition (1.2) folgt wegen $\varrho \neq \underline{1}$, also $j^\varrho \neq j$ für jedes $j \in I$, sofort, daß ϱ^* fixpunktfrei ist. Zu jedem $G \in \mathfrak{G}$ gibt es ein $i \in I$ und ein $L \in \mathfrak{L}$ mit $G = L^i = \bigcup_{j \in I} (L^i \cap T_j) = \bigcup_{j \in I} L^{\varkappa_{ij} \iota_j}$, denn p ist T-Struktur. Wegen $\iota_j \varrho^* = \sigma \iota_{j^\varrho}$ [vgl. (1.2)] erhalten wir:

$$G^{\varrho^*} = \bigcup_{j \in I} L^{\varkappa_{ij} \iota_j \varrho^*} = \bigcup_{j \in I} L^{\varkappa_{ij} \sigma \iota_{j^\varrho}} = \bigcup_{j \in I} L^{\sigma \sigma^{-1} \varkappa_{ij} \sigma \iota_{j^\varrho}}$$

$$= \bigcup_{j \in I} L^{\sigma \varkappa_{i^\varrho j^\varrho} \iota_{j^\varrho}} = \bigcup_{j \in I} (L^{\sigma i^\varrho} \cap T_{j^\varrho}) = L^{\sigma i^\varrho} \| L^i = G;$$

die Parallelität zwischen G und G^{ϱ^*} folgt daraus, daß deren Spuren in T_i bzw. T_{i^ϱ}, nämlich L^{ι_i} und $L^{\sigma \iota_{i^\varrho}}$, zueinander parallel sind (als Bilder der in t parallelen Geraden L und L^σ). Somit ist ϱ^* als Translation von p erkannt. Andererseits ist $T_i^{\varrho^*} = T_{i^\varrho} \neq T_i$ wegen $\varrho \neq \underline{1}$, das ist aber ein Widerspruch zu unserer Annahme, daß T_i ein Transitivitätsgebiet hinsichtlich der Gruppe T *aller* Translationen von p sei.

4. Wir bringen jetzt einige Folgerungen aus Satz 1.2, zu deren Beweis wir nur die Bedingungen (I) bis (VI) benutzen, dagegen nicht mehr unmittelbar auf die Definition (1.1) der kanonischen Abbildungen zurückgreifen[6]).

(a) *Aus* $L^{\varkappa_{ij}} \neq \emptyset$ *und* $L \| L'$ *folgt* $L'^{\varkappa_{ij}} \neq \emptyset$.

Aus $L \| L'$ folgt nämlich die Existenz eines $\tau \in \mathsf{T}$ mit $L' = L^\tau$, denn t ist Translationsstruktur. Nach (IV) ist also $L'^{\varkappa_{ij}} = L^{\tau \varkappa_{ij}} = L^{\varkappa_{ij} \tau} \neq \emptyset$. Ebenso ergibt sich:

[6]) Dies ist wichtig für das im folgenden Paragraphen durchzuführende Umkehrproblem: Aus gegebenen $\varkappa_{ij}$ mit den Eigenschaften (I) bis (VI) eine T-Struktur zu konstruieren.

(b) *Aus* $L^{\varkappa_{ij}} = L$ *und* $L \| L'$ *folgt* $L'^{\varkappa_{ij}} = L'$.

(c) *Aus* $L^{\varkappa_{ij}} \neq \emptyset$ *und* $L^{\varkappa_{jk}} \neq \emptyset$ *folgt* $L^{\varkappa_{ik}} \neq \emptyset$.

Aus (I) folgt nämlich $L \| L^{\varkappa_{ij}}$ und aus (III) und (a) nunmehr $L^{\varkappa_{ik}} = L^{\varkappa_{ij}\varkappa_{jk}} \neq \emptyset$.

Aus (II) und (III) ergibt sich sofort:

(d) *Aus* $L^{\varkappa_{ij}} \neq \emptyset$ *folgt* $L^{\varkappa_{ij}\varkappa_{ji}} = L$.

(e) *Aus* $L^{\varkappa_{ij}} \neq \emptyset$ *folgt* $L^{\varkappa_{ji}} \neq \emptyset$.

Wäre nämlich $L^{\varkappa_{ji}} = \emptyset$, so wegen $L^{\varkappa_{ij}} \| L$ nach (a) auch $L^{\varkappa_{ij}\varkappa_{ji}} = \emptyset$, was im Widerspruch zu (d) steht.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{L}(i, j)$ die Menge aller $L \in \mathfrak{L}$, für die $L^{\varkappa_{ij}} \neq \emptyset$ ist. Dann können wir (e) auch so formulieren:

$$\mathfrak{L}(i, j) = \mathfrak{L}(j, i), \tag{1.3}$$

und für (c) können wir schreiben:

$$\mathfrak{L}(i, j) \cap \mathfrak{L}(j, k) \subseteq \mathfrak{L}(i, k). \tag{1.4}$$

Aus (II) folgt sofort $\mathfrak{L}(i, i) = \mathfrak{L}$.

(f) *Nach* (d) *und* (e) *ist* $\varkappa_{ij}$ *eine eineindeutige Abbildung von* $\mathfrak{L}(i, j)$ *auf sich, und es gilt dort*

$$\varkappa_{ij}^{-1} = \varkappa_{ji}. \tag{1.5}$$

Die nächste Folgerung kehrt in gewisser Weise (b) um:

(g) *Aus* $i \neq j$, $L^{\varkappa_{ij}} = L$ *und* $L'^{\varkappa_{ij}} = L'$ *folgt* $L \| L'$.

Beweis. Sei $p \in L$. Wäre $L \nparallel L'$, so $L'' = \langle L' \| p \rangle \neq L$. Aus (b) folgt andererseits $L''^{\varkappa_{ij}} = L''$, also hätten wir $\{p\} = L \cap L'' = L^{\varkappa_{ij}} \cap L''^{\varkappa_{ij}}$, was für $i \neq j$ im Widerspruch zu (V) steht. — Aus Satz 1.1, (V) und (g) folgt sofort

(h) *Zu jedem* $\varkappa_{ij}$ *mit* $i \neq j$ *gibt es* $L, L' \in \mathfrak{L}(i, j)$ *mit* $L \nparallel L'$ *derart, daß* $L^{\varkappa_{ij}} \neq L$ *und* $L'^{\varkappa_{ij}} \neq L'$ *ist.*

(i) *Zu jedem* $\varkappa_{ij}$ *und* $L \in \mathfrak{L}(i, j)$ *gibt es eine Translation* $\tau_{ij,L}$ *mit*

$$L^{\varkappa_{ij}} = L^{\tau_{ij,L}}. \tag{1.6}$$

Das folgt sofort aus (I) und daraus, daß t Translationsstruktur ist.

(j) *Aus* $L \| L'$ *folgt* $\tau_{ij,L} \equiv \tau_{ij,L'}$ $(\mathsf{T}(L))$.

Aus der Voraussetzung folgt nämlich die Existenz eines $\tau \in \mathsf{T}$ mit $L' = L^{\tau}$. Weil T abelsch ist, folgt $L'^{\tau_{ij,L'}} = L'^{\varkappa_{ij}} = L^{\tau\varkappa_{ij}} = L^{\varkappa_{ij}\tau} = L^{\tau_{ij,L}\tau} = L^{\tau\tau_{ij,L}} = L'^{\tau_{ij,L}}$. Entsprechend schließt man $L''^{\tau_{ij,L'}} = L''^{\tau_{ij,L}}$ für jedes $L'' \| L$; hieraus folgt (j).

Jedes $\varkappa_{ij}$ erzeugt auf $\mathfrak{L}(i, j)$ eine zyklische Permutationsgruppe A_{ij}. Als abstrakte Gruppe ist sie bei endlicher Charakteristik von t (s. II, §4, Ziffer 3) sehr leicht zu übersehen:

(k) *Es habe* t *die Primzahlcharakteristik* p; *dann ist* p *die Ordnung der von* $\varkappa_{ij}$ $(i \neq j)$ *erzeugten Gruppe* A_{ij}.

Beweis. Da jede nichtidentische Translation von T die Ordnung p hat (vgl. II, Satz 4.5), folgt aus (1.6), daß $L^{\varkappa_{ij}^{p}} = L$ für jedes $L \in \mathfrak{L}(i, j)$ ist. Hieraus

folgt $\varkappa_{ij}^{p} = \underline{1}$ auf $\mathfrak{L}(i,j)$. Andererseits ist p auch die genaue Ordnung von $\varkappa_{ij}$, denn sonst wäre $\varkappa_{ij} = \underline{1}$, also $L^{\varkappa_{ij}} = L$ für jedes $L \in \mathfrak{L}(i,j)$, was wegen (h) für $i \neq j$ nicht der Fall sein kann.

(l) *Die Gruppe* A_{ijk} *der von* A_{ij} *und* A_{jk} *auf* $\mathfrak{L}(i,j,k) = \mathfrak{L}(i,j) \cap \mathfrak{L}(j,k)$ *erzeugten Permutationen ist abelsch.*

Hierzu brauchen wir nur die Gültigkeit von $\varkappa_{ij}\varkappa_{jk} = \varkappa_{jk}\varkappa_{ij}$ auf $\mathfrak{L}(i,j,k)$ zu beweisen: Sei $L \in \mathfrak{L}(i,j,k)$. Wir setzen $L^{\varkappa_{ij}} = L'$ und $L^{\varkappa_{jk}} = L^{\tau_{jk,L}} = L''$. Mit L gehört nach (a) auch L' zu $\mathfrak{L}(i,j,k)$. Mit (i) und (j) folgt, da T abelsch ist: $L^{\varkappa_{ij}\varkappa_{jk}} = L'^{\varkappa_{jk}} = L'^{\tau_{jk,L'}} = L^{\tau_{ij,L}\tau_{jk,L}} = L^{\tau_{jk,L}\tau_{ij,L}} = L''^{\tau_{ij,L}} = L''^{\tau_{ij,L''}} = L''^{\varkappa_{ij}} = L^{\varkappa_{jk}\varkappa_{ij}}$, was behauptet war.

Aus (l) folgt

$$\mathsf{A}_{ijk} = \mathsf{A}_{ij}\mathsf{A}_{ik} = \mathsf{A}_{ij}\mathsf{A}_{jk} = \mathsf{A}_{ik}\mathsf{A}_{jk}. \tag{1.7}$$

Ist insbesondere die Charakteristik von t eine Primzahl p, so ist wegen (k) offensichtlich A_{ijk} direktes Produkt zweier (zyklischer) Gruppen der Ordnung p.

(m) *Für eine endliche z. T.* t *gilt für* $i \neq j$ *stets* $\mathfrak{L}(i,j) \subset \mathfrak{L}$.

BEWEIS. Sei $\mathfrak{P} = \{L^{(0)}, \ldots, L^{(n)}\}$ das Büschel aller durch einen festen Punkt von $t = (T, \mathfrak{L})$ gehenden Geraden und $\mathfrak{P}(i,j) = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{L}(i,j) = \{L^{(0)}, \ldots, L^{(m)}\}$. Da durch jeden Punkt von t mindestens drei Geraden gehen (s. III, Zusatz von Satz 1.4), folgt $n \geqq 2$. Aus $|L^{(r)}| = a_r$ $(r = 0, 1, \ldots, n)$ folgt $|T| = \sum_{r=0}^{n} a_r - n + 1$, nach (V) wegen[7]) $\mathfrak{P}^{\varkappa_{ij}} = \mathfrak{P}(i,j)^{\varkappa_{ij}}$ andererseits $|T| = \sum_{r=0}^{m} a_r$, also

$$\sum_{r=m+1}^{n} a_r = n - 1 \geqq 1. \tag{1.8}$$

Hieraus folgt notwendig $m < n$, d.h. $\mathfrak{P}(i,j) \subset \mathfrak{P}$, also auch $\mathfrak{L}(i,j) \subset \mathfrak{L}$, wie behauptet.

Aus (1.8) folgt wegen $a_r \geqq 2$ andererseits $2(n-m) \leqq n-1$, wegen $m = |\mathfrak{P}(i,j)|$ und $n = |\mathfrak{P}|$ also

$$|\mathfrak{P}(i,j)| \geqq \tfrac{1}{2}(|\mathfrak{P}| + 1). \tag{1.9}$$

Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn wirklich alle $a_r = 2$ sind; hierzu ist insbesondere Charakteristik 2 notwendig. Für Charakteristik $\neq 2$ können wir $a_r \geqq 3$ annehmen; dann folgt ebenso:

$$|\mathfrak{P}(i,j)| \geqq \tfrac{1}{3}(2|\mathfrak{P}| + 1). \tag{1.10}$$

(n) Die Bedingung (V) braucht nur für *ein* Geradenbüschel von $t = (T, \mathfrak{L})$ gefordert werden. Seien nämlich $p, p' \in T$ und $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{P}'$ die Büschel mit p bzw. p' als Zentrum. Dann gibt es ein $\tau \in \mathsf{T}$ mit $p' = p^{\tau}$, also $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}^{\tau}$. Wegen (IV) ist nun $\mathfrak{P}'^{\varkappa_{ij}} = \mathfrak{P}^{\tau\varkappa_{ij}} = \mathfrak{P}^{\varkappa_{ij}\tau}$ für $i \neq j$ ebenfalls eine Zerlegung von t.

(o) Die Bedingung (VI) braucht nur für die Streckungen σ mit einem *festen* Zentrum gefordert zu werden. Seien nämlich $p, q \in T$, so gibt es ein

[7]) Siehe Fußnote 4.

$\tau \in \mathsf{T}$ mit $q = p^\tau$. Hat σ den Fixpunkt p, so läßt die Streckung $\tau^{-1}\sigma\tau$ den Punkt q fest, und mit (IV) erhalten wir $\tau^{-1}\sigma^{-1}\tau\varkappa_{ij}\tau^{-1}\sigma\tau = \tau^{-1}\sigma^{-1}\varkappa_{ij}\sigma\tau = \tau^{-1}\varkappa_{i^\varrho j^\varrho}\tau = \varkappa_{i^\varrho j^\varrho}$, wenn $\sigma^{-1}\varkappa_{ij}\sigma = \varkappa_{i^\varrho j^\varrho}$ vorausgesetzt war.

(p) *Für jede affin-axiale Kollineation (d.h. Translation oder Streckung) π von t genügen mit $\varkappa_{ij}$ auch alle $\pi^{-1}\varkappa_{ij}\pi$ den Bedingungen* (I) *bis* (VI) *einer kanonischen Abbildung.*

Beweis. Die Bedingungen (I) bis (III) und (VI) folgen sofort. (IV) schließt man so: Da mit τ auch $\pi\tau\pi^{-1}$ eine Translation ist (vgl. I, §4, Ziffer 4), ergibt sich, da (IV) für $\varkappa_{ij}$ gilt: $\pi\tau\pi^{-1}\varkappa_{ij} = \varkappa_{ij}\pi\tau\pi^{-1}$ und hieraus $\tau\pi^{-1}\varkappa_{ij}\pi = \pi^{-1}\varkappa_{ij}\pi\tau$, was behauptet war. Endlich folgt (V) daraus, daß mit $\mathfrak{P}^{\varkappa_{ij}}$ auch $\mathfrak{P}^{\varkappa_{ij}\pi}$ eine Zerlegung von t ist.

§2. Die Konstruktion von T-Strukturen mit gegebenen kanonischen Abbildungen

1. In §1 sind wir, ausgehend von einer T-Struktur $\mathfrak{p}$, zu einer „Matrix" $(\varkappa_{ij})_{i,j\in I}$ von kanonischen Abbildungen $\varkappa_{ij}$ im Stamm t von $\mathfrak{p}$ gelangt, welche den Eigenschaften (I) bis (VI) von Satz 1.2 genügen. Wir untersuchen jetzt das umgekehrte Problem: Gegeben sei eine z.T. $t = (T, \mathfrak{L})$ und eine Matrix $(\varkappa_{ij})$ von Abbildungen von $\mathfrak{L}$ auf sich oder der leeren Menge mit den Eigenschaften (I) bis (VI) (und damit auch deren Folgerungen); gesucht ist eine T-Struktur $\mathfrak{p}$, deren Stamm t ist und deren kanonische Abbildungen (vgl. §1) mit den gegebenen $\varkappa_{ij}$ übereinstimmen. Eine solche T-Struktur existiert in der Tat immer; wir können somit jede T-Struktur durch ihren Stamm und ihre kanonischen Abbildungen eindeutig kennzeichnen.

2. Sei also $t = (T, \mathfrak{L})$ eine z.T., I eine Indexmenge und $(\varkappa_{ij})_{i,j\in I}$ eine Matrix von auf $\mathfrak{L}$ definierten Abbildungen, welche die Eigenschaften (I) bis (VI) haben. Wir denken uns t in $|I|$ Exemplaren $t_i = (T_i, \mathfrak{L}_i)$ $(i \in I)$ gegeben, die paarweise zueinander disjunkt liegen sollen. Dabei entspreche dem Punkt p von t auf t_i der Punkt p_i. Die Abbildung $p \to p_i$ definiert uns einen Isomorphismus ι_i von t auf t_i. Mittels t und den $\varkappa_{ij}$ konstruieren wir jetzt eine Struktur $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{G}) = \{t, \varkappa_{ij}\}$, von der wir zeigen werden, daß sie eine über t translationstreue T-Struktur mit genau $|I|$ Transitivitätsgebieten hinsichtlich ihrer Translationsgruppe T ist:

Als *Punkte* von $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{G})$ nehmen wir die Punkte aller t_i, d.h.

$$P = \bigcup_{i\in I} T_i; \tag{2.1}$$

als *Geraden* von $\mathfrak{p}$ sind genau die Punktmengen

$$L^i = \bigcup_{k\in I} L^{\varkappa_{ik}\iota_k} \tag{2.2}$$

mit $L \in \mathfrak{L}$ und $i \in I$ definiert; zwei Geraden L^i und L'^j $(L, L' \in \mathfrak{L};\ i, j \in I)$ von $\mathfrak{p}$ heißen *parallel*, wenn L und L' in t zueinander parallel sind.

Zur Definition (2.2) der Geraden von $\mathfrak{p}$ ist zu sagen, daß sie im folgenden Sinne unabhängig von der Wahl von $i \in I$ ist: *Zu jedem $j \in I$ mit $L^i \cap T_j \neq \emptyset$*

gibt es ein $L' \in \mathfrak{L}$ *mit* $L^i = L'^j$. Wegen $L^{\varkappa_{ij} t_j} = \bigcup_{k \in I} L^{\varkappa_{ik} t_k} \cap T_j = L^i \cap T_j \neq \emptyset$ folgt nämlich $L^{\varkappa_{ij}} \neq \emptyset$, mit (III) also

$$L^i = \bigcup_{k \in I} L^{\varkappa_{ik} t_k} = \bigcup_{k \in I} L^{\varkappa_{ij} \varkappa_{jk} t_k} = L'^j,$$

wenn $L' = L^{\varkappa_{ij}}$ gesetzt wird.

Auch die Parallelitätsdefinition ist unabhängig von der Wahl von i und j: *Aus* $L^i = L'^j$, $L^h_* = L'^k_*$ *und* $L^i \| L^h_*$ (d.h. $L \| L_*$) *folgt* $L' \| L'_*$. Soeben wurde nämlich $L' = L^{\varkappa_{ij}}$ bewiesen, ebenso gilt $L'_* = L^{\varkappa_{hk}}_*$. Nun folgt $L' \| L'_*$ sofort aus (I).

Somit sind die gegebenen Definitionen der Geraden und der Parallelität unabhängig von der besonderen Konstruktion, also durch t und die $\varkappa_{ij}$ eindeutig bestimmt.

3. Wir müssen nun zeigen, daß unsere so definierte Struktur $\mathfrak{p}$ tatsächlich alle gewünschten Eigenschaften hat. Zunächst gilt:

HILFSSATZ 2.1. *Die Struktur* $\{t, \varkappa_{ij}\}$ *ist eine a. P.*

BEWEIS. Wir müssen die eine a. P. kennzeichnenden Axiome nachprüfen: (a 0) und (a 1) haben wir bewiesen, wenn wir zeigen, daß durch zwei verschiedene Punkte p_i und q_j (aus T_i bzw. T_j) genau eine Gerade geht. Wir machen dazu die folgende Fallunterscheidung: (α) $i = j$: In diesem Fall ist $\langle p, q \rangle_t^i$ die gewünschte Gerade durch $p_i = p^{t_i}$ und q_i, und eine weitere gibt es nicht, da $\langle p, q \rangle_t$ in t eindeutig bestimmt ist. (β) $i \neq j$: Sei $\mathfrak{P}$ das Büschel der durch p gehenden Geraden aus $\mathfrak{L}$. Nach (V) gibt es genau eine durch q gehende Gerade $L^{\varkappa_{ij}} \in \mathfrak{P}^{\varkappa_{ij}}$ ($L \in \mathfrak{P}$). Die (eindeutig bestimmte) gewünschte Gerade ist L^i.

Axiom (a 2) beweist man so: Sei $L^i \in \mathfrak{G}$ und $p_j \in T_j$ ($i, j \in I$). Aus der Definition der Parallelität folgt, daß $\langle L \| p \rangle_t^j$ eine zu L^i parallele durch p_j gehende Gerade aus $\mathfrak{G}$ ist; sie ist die einzige dieser Art, weil (a 2) in der z.T. t gilt. Die Parallelitätsrelation erfüllt ferner die drei Äquivalenzbedingungen, weil dasselbe für die Parallelität in t der Fall ist.

Da (a 3) in $t = (T, \mathfrak{L})$ gilt, gibt es drei Punkte $p, q, r \in T$, die nicht auf einer Geraden aus $\mathfrak{L}$ liegen. Wegen $L^i \cap T_i = L_i$ ($L \in \mathfrak{L}$) können dann auch $p_i, q_i, r_i \in T_i$ nicht auf einer Geraden aus $\mathfrak{G}$ liegen.

Schließlich folgt (a 4), sogar (t 2), nach der Geradendefinition (2.2) sofort aus der Gültigkeit von (t 2) für die Translationsstruktur t.

Da t zu allen t_i isomorph ist, können wir t als Unterstruktur von $\mathfrak{p} = \{t, \varkappa_{ij}\}$ auffassen. Wir wollen zeigen, daß $\mathfrak{p}$ translationstreu über t ist. Hierzu benötigen wir einige Hilfssätze:

HILFSSATZ 2.2. *Jede Translation* τ *von* t *induziert eine Translation* τ^* *auf* $\mathfrak{p}$, *die jedes* T_i *auf sich abbildet.*

Die durch $t_i^{\tau^*} = t^{t_i \tau^*} = t^{\tau t_i}$ ($t \in T$) definierte Transformation bildet nämlich jedes T_i eineindeutig auf sich ab. Außerdem ist τ^* auf $\mathfrak{p}$ eine Translation; denn zunächst folgt aus $\tau \neq \underline{1}$ auf t, daß τ^* auf P keinen Punkt festläßt;

ist andererseits $\tau = \underline{1}$, so ist auch $\tau^* = \underline{1}$. Wegen (IV) gilt ferner

$$L^{i\tau^*} = \bigcup_{j \in I} L^{x_{ij} y_j \tau^*} = \bigcup_{j \in I} L^{x_{ij} \tau y_j} = \bigcup_{j \in I} L^{\tau x_{ij} y_j} = L^{\tau i} \| L^i,$$

letzteres nach unserer für $\mathfrak{p}$ gegebenen Definition der Parallelität.

Als Umkehrung von Hilfssatz 2.2 gilt:

Hilfssatz 2.3. *Jede Translation τ von $\mathfrak{p}$ mit $T_i^\tau = T_i$ für ein bestimmtes $i \in I$ induziert eine Translation τ' auf $\mathfrak{t}$. Ferner gilt dann $T_j^\tau = T_j$ für alle $j \in I$.*

Wir setzen $\tau' = \iota_i \tau \iota_i^{-1}$, die so bestimmte Abbildung ist offensichtlich eine Translation auf $\mathfrak{t}$. Ferner erkennt man sofort, daß $\tau'^* = \tau$ und ebenso $\tau^{*\prime} = \tau$ ist (vgl. den Beweis von Hilfssatz 2.2). Hieraus folgt zusammen mit Hilfssatz 2.2 der zweite Teil unserer Behauptung.

Aus den beiden letzten Hilfssätzen folgt

Hilfssatz 2.4. *Die Gruppe derjenigen Translationen von $\mathfrak{p}$, die ein (und damit jedes) T_i (als Ganzes) festlassen, ist zur Gruppe T aller Translationen von $\mathfrak{t}$ isomorph. Genau die T_i sind Transitivitätsgebiete hinsichtlich dieser Gruppe.*

Beweis. Die Abbildung $\tau \leftrightarrow \tau^*$ mit $\tau \in \mathsf{T}$ (vgl. den Beweis von Hilfssatz 2.2) vermittelt den gewünschten Isomorphismus. Da T auf T transitiv ist, so auch die Gruppe aller τ^* auf jedem T_i. Andere Transitivitätsgebiete dieser Gruppe gibt es nicht, da ja die T_i bereits ganz P überdecken.

Bemerkung. Wir können und wollen somit die beiden in Hilfssatz 2.4 vorkommenden Gruppen miteinander identifizieren und künftig T nennen. Wir setzen also $\tau^* = \tau' = \tau$.

Hilfssatz 2.5. *Jedes $\tau \in \mathsf{T}$ ist zentral.*

Beweis. Bei vorgegebenem $\tau \in T$ sei $L \in \mathfrak{L}$ so gewählt, daß $L^\tau = L$ ist (ein solches L existiert, da $\mathfrak{t}$ zentral ist), dann gilt auch $L^{i\tau} = L^i$. Ferner sei $L'^j \| L^i$, nach unserer Parallelendefinition in $\mathfrak{p}$ (vgl. Ziffer 2) also auch $L' \| L$. Mit (IV) [vgl. auch den Beweis von Hilfssatz 2.2] folgt $L'^{i\tau} = L'^{\tau j} = L'^j$, letzteres, weil τ in $\mathfrak{t}$ zentral ist. Dies bedeutet aber, daß τ auch in $\mathfrak{p}$ zentral ist.

4. Wir geben als nächstes eine Übersicht über *alle* zentralen Translationen von $\mathfrak{p}$. Aus (VI) wird sich als Umkehrung von Hilfssatz 2.5 ergeben, daß jede zentrale Translation von $\mathfrak{p}$ zu T gehört. Im folgenden sei ζ stets eine zentrale Translation von $\mathfrak{p}$.

Hilfssatz 2.6. *Jedes T_i^ζ $(i \in I)$ ist Transitivitätsgebiet hinsichtlich T.*

Beweis. Seien $p_i, q_i \in T_i$, dann gibt es ein $\tau \in \mathsf{T}$ mit $p_i^\tau = q_i$, denn T_i ist nach Hilfssatz 2.4 ein Transitivitätsgebiet bezüglich T. Nach I, Satz 4.5 ist τ mit ζ vertauschbar, wenn τ und ζ verschiedene Zentren haben. Stimmen die Zentren von τ und ζ überein, so wählen wir ein nichtidentisches $\tau' \in \mathsf{T}$, das ein anderes Zentrum als τ (und ζ) hat. Dann sind auch die Zentren von $\tau'\tau$ und ζ voneinander verschieden, und wir erhalten $\tau'\tau\zeta = \zeta\tau'\tau = \tau'\zeta\tau$. Jedenfalls gilt also stets $\tau\zeta = \zeta\tau$. Hieraus schließen wir $q_i^\zeta = p_i^{\tau\zeta} = p_i^{\zeta\tau}$, d.h. auch

p_i^ζ und q_i^ζ gehören ein und demselben Transitivitätsgebiet von T an; T_i^ζ ist also Transitivitätsgebiet hinsichtlich T.

Aus den Hilfssätzen 2.4 und 2.6 folgt, daß ζ eine Permutation $\bar{\zeta}$ auf der Menge aller T_i und damit auch auf I induziert: Wir können

$$T_i^\zeta = T_{i\bar{\zeta}} \tag{2.3}$$

setzen. Offensichtlich ist $\overline{\zeta\zeta'} = \bar{\zeta}\bar{\zeta}'$.

HILFSSATZ 2.7. *Jedes zentrale ζ permutiert die T_i regulär, d.h. die von ζ auf I induzierte Permutation $\bar{\zeta}$ ist regulär.*

BEWEIS. Aus der Existenz eines $i \in I$ und einer natürlichen Zahl n mit $i^{\bar{\zeta}^n} = i^{\bar{\zeta}^n} = i$ folgt $T_i^{\zeta^n} = T_i$, nach Hilfssatz 2.3 hieraus $T_j^{\zeta^n} = T_j$ für *alle* $j \in I$, d.h. $\bar{\zeta}^n = \underline{1}$, was behauptet war.

5. Es sei jetzt η eine (nicht notwendig zentrale) Translation von $\mathfrak{p}$, welche die T_i regulär permutiert, d.h. für die es eine auf I reguläre Permutation $\bar{\eta}$ gibt mit $T_i^\eta = T_{i\bar{\eta}}$. (Nach Hilfssatz 2.7 haben alle zentralen Translationen diese Eigenschaft.) Zur Abkürzung setzen wir $i^{\bar{\eta}} = i^{\bar{\eta}}$.

HILFSSATZ 2.8. *Die Abbildung $\pi_i = \iota_i \eta \iota_{i^{\bar{\eta}}}^{-1}$ ist eine affin-axiale Kollineation (d.h. Translation oder Streckung) von $\mathfrak{k}$.*

BEWEIS. Zunächst ist klar, daß π_i eine eineindeutige Abbildung von T auf sich ist. Da η Translation ist, gilt ferner $L^i \| L^{i\eta} = L'^{i^{\bar{\eta}}}$; hierbei ist L' zu L parallel (vgl. die in Ziffer 2 gegebene Definition der Parallelität für $\mathfrak{p} = \{\mathfrak{k}, \varkappa_{ij}\}$). Also ist

$$L^{\pi_i} = L^{\iota_i \eta \iota_{i^{\bar{\eta}}}^{-1}} = (L^i \cap T_i)^{\eta \iota_{i^{\bar{\eta}}}^{-1}} = (L^{i\eta} \cap T_{i^{\bar{\eta}}})^{\iota_{i^{\bar{\eta}}}^{-1}} = (L'^{i^{\bar{\eta}}} \cap T_{i^{\bar{\eta}}})^{\iota_{i^{\bar{\eta}}}^{-1}} = L_i'^{\iota_{i^{\bar{\eta}}}^{-1}} = L' \| L,$$ w.z.b.w.

HILFSSATZ 2.9. *Sei $\varrho \neq \underline{1}$ eine auf I reguläre Permutation und $j^\varrho = j^{\bar{\varrho}}$ $(j \in I)$ gesetzt. Zu jedem j sei eine affin-axiale Kollineation π_j auf $\mathfrak{k}$ definiert. Die auf P definierte Abbildung*

$$\eta = \iota_i^{-1} \pi_j \iota_{i^{\bar{\varrho}}}, \tag{2.4}$$

ist genau dann eine Translation auf $\mathfrak{p}$, wenn alle π_j übereinstimmen (sie werden dann π genannt) und wenn

$$\varkappa_{i^{\bar{\varrho}} j^{\bar{\varrho}}} = \pi^{-1} \varkappa_{ij} \pi \tag{2.5}$$

für alle $i, j \in I$ gilt.

BEWEIS. Jedenfalls ist η eineindeutig und wegen $\varrho \neq \underline{1}$ auf $\mathfrak{p}$ fixpunktfrei. Aus (2.4) folgt

$$L^{i\eta} = \bigcup_{j \in I} L^{\varkappa_{ij} \eta} = \bigcup_{j \in I} L^{\varkappa_{ij} \pi_{j^{\bar{\varrho}}} \iota_{j^{\bar{\varrho}}}} = \bigcup_{j \in I} L^{\pi_j \pi_{j^{\bar{\varrho}}}^{-1} \varkappa_{ij} \pi_{j^{\bar{\varrho}}} \iota_{j^{\bar{\varrho}}}}$$

für alle $L \in \mathfrak{L}$. Damit dies eine Gerade (und damit dann eine zu L^i parallele) von $\mathfrak{p}$ ist, muß notwendig $L^{\pi_j \pi_{j^{\bar{\varrho}}}^{-1} \varkappa_{ij} \pi_j} = L'^{\varkappa_{i^{\bar{\varrho}} j^{\bar{\varrho}}}}$ für ein $L' \in \mathfrak{L}$ und alle $i, j \in I$ gelten. Wegen (II) ergibt die Spezialisierung $j = i$ insbesondere $L' = L^{\pi_j}$. Für jedes $L \in \mathfrak{L}$ ist also L^{π_j} von j unabhängig, mithin hängt auch π_j von j nicht ab:

$\pi_j = \pi$. Nun folgt $\pi^{-1}\varkappa_{ij}\pi = \varkappa_{\bar{i}\bar{j}}$ als notwendige Bedingung dafür, daß η Translation ist. Sie ist aber auch hinreichend wegen

$$L^{i\eta} = \bigcup_{j \in I} L^{\pi \varkappa_{\bar{i}\bar{j}} \iota_{\bar{j}}} = L^{\pi \bar{i}} \| L^i.$$

Es gilt die folgende Umkehrung:

Hilfssatz 2.10. *Jede Translation η, welche die T_i regulär permutiert, läßt sich als Abbildung der in Hilfssatz 2.9 angegebenen Art darstellen, d.h. zu jedem solchen η gibt es eine affin-axiale Kollineation π von t mit $\eta = \iota_j^{-1} \pi \iota_{\bar{j}}$ $(\bar{j} = j^{\bar{\eta}})$.*

Beweis. Nach Hilfssatz 2.8 ist jedenfalls $\iota_j \eta \iota_{\bar{j}}^{-1} = \pi_j$ für jedes $j \in I$ eine affin-axiale Kollineation auf t. Aus Hilfssatz 2.9 folgt, daß die π_j alle übereinstimmen. Setzen wir sie $= \pi$, so haben wir den gewünschten Sachverhalt.

Aus den Hilfssätzen 2.9 und 2.10 sowie aus (VI) folgt jetzt sofort

Hilfssatz 2.11. *Jede Translation η, welche die T_i regulär permutiert, läßt jedes T_i fest, gehört also zu* T.

Mit Hilfssatz 2.7 folgt insbesondere der

Zusatz. *Jede zentrale Translation gehört zu* T.

Weitergehend zeigen wir jetzt

Hilfssatz 2.12. *Jede Translation von $\mathfrak{p}$ ist zentral (und gehört mithin zu* T).

Beweis. Sei α eine Translation von $\mathfrak{p}$. Mit τ ist auch $\alpha^{-1}\tau\alpha$ eine zentrale Translation (vgl. I, §4, Ziffer 4), nach dem Zusatz zu Hilfssatz 2.11 gilt mithin $\alpha^{-1}\mathsf{T}\alpha = \mathsf{T}$. Jedes T_i^α ist Transitivitätsgebiet hinsichtlich T; denn es ist einerseits $T_i^{\alpha\mathsf{T}} = T_i^{\mathsf{T}\alpha} = T_i^\alpha$, andererseits bleibt aber auch keine echte Teilmenge U_i von T_i^α bei T fest. Wäre nämlich $U_i^{\mathsf{T}} = U_i$, so $U_i^{\alpha^{-1}\mathsf{T}} = U_i^{\alpha^{-1}} \subset T_i$; das ist aber nicht möglich, weil T_i ein Transitivitätsgebiet von T ist. Somit permutiert α die T_i untereinander; sie werden durch α sogar regulär permutiert: Aus $T_i^{\alpha^r} = T_i$ für ein $i \in I$ und eine natürliche Zahl r folgt nämlich $T_j^{\alpha^r} = T_j$ für alle $j \in I$ nach Hilfssatz 2.3. Wegen Hilfssatz 2.11 gehört also α zu T, und α ist zentral.

Hilfssatz 2.13. *Auf $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{G})$ gibt es Translationen in jeder Richtung, d.h. zu jedem $G \in \mathfrak{G}$ gibt es ein $\tau \neq \underline{1}$ aus* T *mit $G^\tau = G$.*

Beweis. Zu jedem $G \in \mathfrak{G}$ gibt es ein $L \in \mathfrak{L}$ und ein $i \in I$ mit $G = L^i$ [vgl. die Definition (2.2)]. Weil t eine z.T. ist, gibt es ein $\tau \neq \underline{1}$ aus T mit $L^\tau = L$. Für dasselbe τ gilt auch $G^\tau = G$.

6. Nunmehr haben wir alle Hilfsmittel zur Hand, um den Hauptsatz dieses Paragraphen beweisen zu können, welcher die Ergebnisse von §1 umkehrt.

Satz 2.1. *Zu jeder zentralen Translationsstruktur t und jeder Matrix kanonischer Abbildungen $\varkappa_{ij}$ $(i, j \in I)$ über t [mit den Eigenschaften* (I) *bis* (VI) *von Satz* 1.2] *gibt es eine Struktur $\mathfrak{p} = \{t, \varkappa_{ij}\}$ (die nach dem in Ziffer* 2 *beschriebenen Verfahren konstruiert wird). Sie ist eine über t translationstreue T-Struktur.*

Beweis. Nach Hilfssatz 2.1 ist $\mathfrak{p}$ eine a.P. Nach den Hilfssätzen 2.2 und 2.12 ist $\mathfrak{p}$ zentral und translationstreu über t. Wegen Hilfssatz 2.13 ist $\mathfrak{p}$ sogar eine T-Struktur.

§ 3. Weitere Eigenschaften der T-Strukturen

1. In §1 sind wir von einer T-Struktur $\mathfrak{p}$ ausgegangen und haben dazu eine z.T., den Stamm $t=t_{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{p}$, und eine Schar kanonischer Abbildungen $\varkappa_{ij}=\varkappa_{ij}(\mathfrak{p})$ mit gewissen Eigenschaften gefunden. In §2 gingen wir umgekehrt von einer z.T. t und kanonischen Abbildungen $\varkappa_{ij}$ aus und gelangten zu einer T-Struktur $\mathfrak{p}=\{t, \varkappa_{ij}\}$. Wir müssen jetzt zeigen, daß beide Konstruktionen hintereinander ausgeführt wieder zum Ausgangsbereich zurückführen. Genauer gesagt müssen wir also die Gültigkeit von

$$t_{\{t,\varkappa_{ij}\}}=t, \qquad \varkappa_{ij}(\{t,\varkappa_{ij}\})=\varkappa_{ij} \tag{3.1}$$

und

$$\{t_{\mathfrak{p}},\ \varkappa_{ij}(\mathfrak{p})\}=\mathfrak{p} \tag{3.2}$$

nachweisen (wobei isomorphe Bereiche in üblicher Weise identifiziert werden, wie im folgenden ausgeführt wird).

BEWEIS VON (3.1). Da $\{t, \varkappa_{ij}\}$ translationstreu über t (vgl. Satz 2.1), also t Stamm von $\{t, \varkappa_{ij}\}$ ist (vgl. III, §2), gilt $t_{\{t,\varkappa_{ij}\}}=t$. Die zweite Gleichung von (3.1) folgt mit Hilfe von (2.2) und (1.1) so:

$$\bigcup_{j\in I} L^{\varkappa_{ij}\,t_j}=L^i=\bigcup_{j\in I}(L^i\cap T_j)^{\tau_j^{-1}t_j}$$
$$=\bigcup_{j\in I} L^{\varkappa_{ij}(\{t,\varkappa_{ij}\})\,t_j}, \quad \text{also} \quad L^{\varkappa_{ij}}=L^{\varkappa_{ij}(\{t,\varkappa_{ij}\})}$$

für jedes $L\in\mathfrak{L}$ und $i, j\in I$.

BEWEIS VON (3.2). Seien T bzw. T^* die Translationsgruppen von $\mathfrak{p}=(P, \mathfrak{G})$ bzw. $\{t_{\mathfrak{p}}, \varkappa_{ij}(\mathfrak{p})\}=\mathfrak{p}^*=(P^*, \mathfrak{G}^*)$. Die Mächtigkeiten der Mengen der Transitivitätsgebiete von P bzw. P^* hinsichtlich T bzw. T^* sind $|I|$, stimmen also überein. Ebenso haben $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^*$ (bis auf Isomorphie) den gleichen Stamm $t_{\mathfrak{p}}$. Wir können und wollen somit die Transitivitätsgebiete T_i und T_i^* für jedes $i\in I$, mithin auch P und P^*, miteinander identifizieren, ebenfalls die Translationsgruppen T und T^*, die ja isomorph zur Translationsgruppe von $t_{\mathfrak{p}}$ sind.

Sei L eine Gerade von $t_{\mathfrak{p}}$ und L^i bzw. L^{i*} diejenige Gerade aus $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{G}^*$, welche in T_i die Spur $L_i=L^{i*}$ hat. Mit Hilfe von (2.2) und (1.1) erhalten wir nun

$$L^{i*}=\bigcup_{j\in I} L^{\varkappa_{ij}(\mathfrak{p})\,t_j}=\bigcup_{j\in I}(L^i\cap T_j)^{\tau_j^{-1}t_j}=\bigcup_{j\in I}(L^i\cap T_j)=L^i.$$

Auch die Geraden und die Inzidenzbeziehungen stimmen also in $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^*$ überein.

Sind L^i und L'^j ($i, j\in I$; L und L' Geraden von $t_{\mathfrak{p}}$) in $\mathfrak{p}$ parallel, so ist $L\parallel L'$ in $t_{\mathfrak{p}}$, hieraus folgt aber die Parallelität von L^i und L'^j auch in $\mathfrak{p}^*$, ebenso gilt die Umkehrung. Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p}^*$ übereinstimmt.

2. Wir können nunmehr die bisherigen Ergebnisse von Teil IV in dem folgenden Hauptsatz zusammenfassen, der eine gewisse Übersicht über den Bau der T-Strukturen gibt.

Satz 3.1. *Zu jeder zentralen Translationsstruktur t und jeder Matrix $(\varkappa_{ij})_{i,j\in I}$ von kanonischen Abbildungen [die den Bedingungen* (I) *bis* (VI) *von Satz* 1.2 *genügen] kann man eine T-Struktur $\mathfrak{p}=\{t,\varkappa_{ij}\}$ mit genau $|I|$ Transitivitätsgebieten hinsichtlich ihrer Translationsgruppe bilden: Die Punkte und Geraden von $\mathfrak{p}$ werden durch* (2.1) *bzw.* (2.2) *definiert, die Parallelität zwischen Geraden wird als naturgemäße Erweiterung der in t gegebenen Parallelität eingeführt [s. die Definition im Anschluß an* (2.2)*]. Die T-Struktur $\mathfrak{p}$ ist über t translationstreu. Umgekehrt läßt sich jede über t translationstreue T-Struktur in der oben angegebenen Gestalt darstellen. Die so erhaltene Zuordnung zwischen den über t translationstreuen T-Strukturen einerseits und den Strukturen $\{t,\varkappa_{ij}\}$ andererseits ist umkehrbar eindeutig.*

3. Der soeben angegebene Struktursatz gestattet uns nun, nichttriviale Beispiele von T-Strukturen anzugeben und weitere Eigenschaften herzuleiten. Zunächst wollen wir uns aber eine Übersicht über die Kollineationen einer T-Struktur $\mathfrak{p}=\{t,\varkappa_{ij}\}$ verschaffen. Wir formulieren zuerst den folgenden, der Folgerung (p) von §1 (Ziffer 5) analogen Satz, der auch entsprechend wie (p) bewiesen wird.

Satz 3.2. *Für jede Kollineation γ von t genügen mit $\varkappa_{ij}$ auch alle $\gamma^{-1}\varkappa_{ij}\gamma$ den Bedingungen* (I) *bis* (VI), *sind also kanonische Abbildungen.*

Sei nun γ eine Kollineation von $\mathfrak{p}$. Zunächst beweisen wir zwei Hilfssätze über γ.

Hilfssatz 3.1. *Jedes T_i^γ $(i\in I)$ ist Transitivitätsgebiet hinsichtlich* T. *Mithin induziert γ auf I eine Permutation $\bar\gamma$ durch*

$$T_i^\gamma = T_{i\bar\gamma}.$$

Beweis. Seien $p_i, q_i\in T_i$; es gibt ein $\tau\in\mathsf{T}$ mit $q_i=p_i^\tau$, also gilt $q_i^\gamma=p_i^{\tau\gamma}=p_i^{\gamma\gamma^{-1}\tau\gamma}$. Wegen $\gamma^{-1}\tau\gamma\in\mathsf{T}$ ist alles gezeigt.

Analog wie in §2 setzen wir $i^{\bar\gamma}=\bar\imath$ zur Abkürzung.

Hilfssatz 3.2. *Die Abbildung $\gamma_i=\iota_i\gamma\iota_{\bar\imath}^{-1}$ ist eine Kollineation in t.*

Der Beweis geht entsprechend wie der von Hilfssatz 2.8: Zunächst ist γ_i eineindeutig auf T. Sei $L\in\mathfrak{L}$, dann ist $L^{\gamma_i}=L^{\iota_i\gamma\iota_{\bar\imath}^{-1}}=(L^i\cap T_i)^{\gamma\iota_{\bar\imath}^{-1}}=(L^{i\gamma}\cap T_{\bar\imath})^{\iota_{\bar\imath}^{-1}}\in\mathfrak{L}$ wegen $L^{i\gamma}\in\mathfrak{G}$. Aus $L\parallel L'$ folgt $L^i\parallel L'^j$ $(i,j\in I)$, hieraus $L^{i\gamma}\parallel L'^{i\gamma}$ und daraus schließlich $L^{\gamma_i}\parallel L'^{\gamma_i}$. Damit sind alle Eigenschaften einer Kollineation gezeigt.

Nunmehr können wir den Satz über die Kollineationen einer T-Struktur formulieren und beweisen:

Satz 3.3. *Jede Kollineation γ der T-Struktur $\mathfrak{p}=\{t,\varkappa_{ij}\}$ induziert auf t eine Kollineation γ^* und auf I eine Permutation $\bar\gamma$ derart, daß*

$$\varkappa_{\bar\imath\bar\jmath}=\gamma^{*-1}\varkappa_{ij}\gamma^* \qquad (i,j\in I;\ i^{\bar\gamma}=\bar\imath,\ j^{\bar\gamma}=\bar\jmath) \tag{3.3}$$

und

$$t_j^\gamma = t^{\gamma^*\iota_{\bar\jmath}} \qquad (t\in T) \tag{3.4}$$

wird. Umgekehrt definieren γ^* und $\bar\gamma$, wenn sie durch (3.3) *miteinander verknüpft sind, durch* (3.4) *eine Kollineation γ auf $\mathfrak{p}$.*

BEWEIS. Nach Hilfssatz 3.2 ist $\gamma_j = \iota_j \gamma \iota_{\bar{j}}^{-1}$ auf t eine Kollineation, mithin $L^{\gamma_j} \in \mathfrak{L}$, wenn $L \in \mathfrak{L}$ ist. Wir erhalten

$$L^{i\gamma} = \bigcup_{j \in I} L^{\varkappa_{ij} \iota_j \gamma} = \bigcup_{j \in I} L^{\varkappa_{ij} \gamma_{\bar{j}} \iota_{\bar{j}}} = \bigcup_{j \in I} L^{\gamma_i \gamma_{\bar{i}}^{-1} \varkappa_{ij} \gamma_{\bar{j}} \iota_{\bar{j}}}.$$

Dieser Ausdruck soll eine Gerade darstellen, er ist mithin $= \bigcup_{j \in I} L'^{\varkappa_{i\bar{j}} \iota_{\bar{j}}}$ für ein $L' \in \mathfrak{L}$. Hieraus folgt

$$L^{\gamma_i \gamma_{\bar{i}}^{-1} \varkappa_{ij} \gamma_{\bar{j}}} = L'^{\varkappa_{i\bar{j}}} \tag{3.5}$$

für alle $i, j \in I$. Für $i = j$ erhalten wir wegen (II) insbesondere $L' = L^{\gamma_i}$. Da L' nicht von j abhängt, stimmen alle γ_i überein: $\gamma_i = \gamma^*$ für jedes $j \in I$; das ergibt $\iota_j \gamma \iota_{\bar{j}}^{-1} = \gamma^*$, also (3.4). Außerdem folgt (3.3) jetzt sofort aus (3.5). Sind umgekehrt (3.3) und (3.4) erfüllt, so erhalten wir

$$L^{i\gamma} = \bigcup_{j \in I} L^{\gamma^* \varkappa_{i\bar{j}} \iota_{\bar{j}}} = L^{\gamma^* \bar{i}},$$

und man sieht nun leicht, daß γ eine Kollineation ist.

4. Wir wollen jetzt die Streckungen von $\{t, \varkappa_{ij}\}$ untersuchen. Sei σ eine Streckung mit dem Zentrum $t_i \in T_i$ $(i \in I)$, und σ^* bzw. $\bar{\sigma}$ seien entsprechend wie γ^*, $\bar{\gamma}$ in der vorigen Ziffer definiert; ferner sei $j^{\bar{\sigma}} = \bar{j}$ $(j \in I)$ gesetzt.

HILFSSATZ 3.3. *Die Kollineation $\sigma^* = \iota_i \sigma \iota_{\bar{i}}^{-1}$ ist eine Streckung in t mit dem Fixpunkt t.*

BEWEIS. Nach Hilfssatz 3.2 ist σ^* jedenfalls eine Kollineation. Wegen $L^{i\sigma} \| L^i$ ist auch $L^{\sigma^*} \| L$. Da t_i Fixpunkt von σ ist, bleibt $t \in T$ bei σ^* fest.

HILFSSATZ 3.4. *Die Permutation $\bar{\sigma}$ läßt i fest und permutiert die von i verschiedenen Elemente aus I regulär.*

BEWEIS. Aus $t_i^{\sigma} = t_i$ und Hilfssatz 3.1 folgt $i^{\bar{\sigma}} = i$. Sei n eine natürliche Zahl. Ist $j^{\bar{\sigma}^n} = j^{\overline{\sigma^n}} = j$ für ein $j \neq i$, so hat σ^n die beiden voneinander verschiedenen Fixpunkte t_i und t_j; denn es ist $\sigma^{*n} = \iota_j \sigma^n \iota_{\bar{j}}^{-1}$, also $t_j^{\sigma^n} = t^{\sigma^{*n} \iota_j} = t^{\iota_j} = t_j$. Das bedeutet aber (vgl. I, Satz 4.1) $\sigma^n = \underline{1}$, also auch $\bar{\sigma}^n = \underline{1}$.

Aus Satz 3.3 folgt für Streckungen die folgende Spezialisierung:

SATZ 3.4. *Jede Streckung σ der T-Struktur $\mu = \{t, \varkappa_{ij}\}$ mit Fixpunkt in T_i $(i \in I)$ induziert auf t eine Streckung σ^* und auf I eine i festlassende auf $I - \{i\}$ reguläre Permutation $\bar{\sigma}$ derart, daß*

$$\varkappa_{\bar{j}\bar{k}} = \sigma^{*-1} \varkappa_{ik} \sigma^* \qquad (j, k \in I;\ \bar{j} = j^{\bar{\sigma}},\ \bar{k} = k^{\bar{\sigma}}) \tag{3.6}$$

und

$$t_j^{\sigma} = t^{\sigma^* \iota_j} \qquad (t \in T) \tag{3.7}$$

ist. Umgekehrt definieren σ^* und $\bar{\sigma}$, wenn sie vermöge (3.6) *miteinander verknüpft sind, durch* (3.7) *eine Streckung σ mit Fixpunkt in T_i.*

BEWEIS. (a) Sei σ eine Streckung mit Fixpunkt in T_i; da σ eine Kollineation ist, können wir Satz 3.3 anwenden, insbesondere gemäß dieses Satzes σ^* und $\bar{\sigma}$ bilden. Nach Hilfssatz 3.3 ist σ^* eine Streckung auf t, nach Hilfssatz 3.4

permutiert $\bar{\sigma}$ die Elemente von $I-\{i\}$ regulär, während i festbleibt. Aus (3.3) bzw. (3.4) folgt (3.6) bzw. (3.7).

(b) Sei jetzt umgekehrt σ^* eine Streckung auf t und $\bar{\sigma}$ eine auf $I-\{i\}$ reguläre Permutation, die i festläßt; ferner sei (3.6) erfüllt. Dann ist das durch (3.7) definierte σ nach Satz 3.3 jedenfalls eine Kollineation. Um zu zeigen, daß σ eine Streckung ist, bemerken wir, daß wegen $L^{\sigma^*} \| L$ auch $L^{j\sigma} = L^{\sigma^* \bar{j}}$ zu L^j parallel ist; außerdem hat σ einen Fixpunkt in T_i; ist nämlich $\iota \in T$ Fixpunkt von σ^*, so gilt $t_i^{\sigma} = t^{\sigma^* \iota_{\bar{i}}} = t_{\bar{i}} = t_i \in T_i$.

Satz 3.4 gestattet eine interessante Folgerung. Nach ihm ist nämlich auch die durch

$$t_j \to t_{j\varrho} \qquad (t \in T,\ j \in I) \tag{3.8}$$

definierte Abbildung eine Streckung von $\mathfrak{p}$, wenn ϱ eine Permutation auf I ist, welche i festläßt und die übrigen $j \in I$ regulär permutiert, und wenn ferner $\varkappa_{j\varrho\, k\varrho} = \varkappa_{jk}$ für alle $j, k \in I$ gilt. Da aber die Abbildung (3.8) alle Punkte aus T_i festläßt, ist die so definierte Streckung die Identität; es muß also auch notwendig $\varrho = \underline{1}$ sein.

Die Negation dieser Aussage ergibt einen Sachverhalt, der ähnlich wie die Bedingung (VI) aussieht:

Satz 3.5. *Zu jedem $i \in I$ und jeder Permutation $\varrho \neq \underline{1}$ auf I, welche i festläßt und die übrigen Elemente von I regulär permutiert, gibt es $j, k \in I$ mit*

$$\varkappa_{j\varrho\, k\varrho} \neq \varkappa_{jk}. \tag{3.9}$$

5. Wir nehmen nun an, daß $\mathfrak{p} = \{t, \varkappa_{ij}\}$ *endlich* sei. In diesem Falle kann $I = \{0, 1, \ldots, t\}$ gesetzt werden; die Anzahl der Transitivitätsgebiete hinsichtlich T ist dann $t+1$. Aus I, Satz 5.3 folgt, daß in höchstens einem Transitivitätsgebiet T_i $(i = 0, \ldots, t)$ Zentren nichtidentischer Streckungen liegen. O.B.d.A. sei dies T_0, d.h. aus $p \in T_0$ folgt $\Pi_p = \{\underline{1}\}$. Wir nennen in diesem Falle T_0 den *Sockel* von $\mathfrak{p}$. Die übrigen T_i werden durch eine Streckung aus Π_{p_0} $(p_0 \in T_0)$ regulär permutiert (vgl. Satz 3.4). Sei q_0 ein weiterer Punkt aus T_0; dann gibt es ein (eindeutig bestimmtes) $\tau \in \mathsf{T}$ mit $q_0 = p_0^{\tau}$. Aus I, Satz 5.3 (a) folgt $\Pi_{q_0} = \tau^{-1} \Pi_{p_0} \tau$; die Streckungsgruppen mit Zentren in T_0 sind also alle zueinander isomorph, und zwar nicht nur als abstrakte Gruppen, sondern auch als Permutationsgruppen; wir können nun von *der* Streckungsgruppe Π_* von $\mathfrak{p}$ reden, die als zu einer (und damit zu allen) Π_{p_0} mit $p_0 \in T_0$ isomorph erklärt wird.

Satz 3.6. *Die Streckungsgruppe Π_* einer endlichen T-Struktur ist Untergruppe der multiplikativen Gruppe eines Galois-Feldes, insbesondere also zyklisch*[8]).

Beweis. Seien $\sigma, \sigma' \in \Pi_{p_0}$, ferner $\sigma^* = \iota_j \sigma \iota_{\bar{j}}^{-1}$ und $\sigma'^* = \iota_j \sigma' \iota_{\bar{j}}^{-1} = \iota_{\bar{i}} \sigma' \iota_{\bar{j}\bar{i}}^{-1}$ (wie in Hilfssatz 3.3 eingeführt). Es folgt $(\sigma\sigma')^* = \sigma^* \sigma'^*$. Ist $\sigma^* = \underline{1}$, so $\iota_j \sigma = \iota_{\bar{j}}$, also $q_j^{\sigma} = q_{\bar{j}}$ für jedes $q \in T$; insbesondere läßt also σ jeden Punkt von T_0 fest, es ist also $\sigma = \underline{1}$. Somit ist Π_{p_0}, also auch Π_* zur Gruppe Π_p^* aller σ^* isomorph.

[8]) Dieser Satz gilt bereits für endliche t-Strukturen und kann hierfür mit ähnlichen Methoden bewiesen werden.

Die letztere ist aber Untergruppe der Gruppe Π_p aller p-Streckungen von t. Nun ist aber Π_p multiplikative Gruppe eines Galois-Feldes, nämlich des Kernes von t (vgl. II, Sätze 4.2 und 4.4).

Sei ϱ eine auf $I-\{i\}$ reguläre Permutation und $i^\varrho = i$, ferner σ^* eine Streckung auf t. Gilt $\varkappa_{j^\varrho k^\varrho} = \sigma^{*-1}\varkappa_{jk}\sigma^*$ für alle $j, k \in I$, so definiert nach Satz 3.4 die Abbildung $p_j \to p^{\sigma^* ij^\varrho}$ eine Streckung σ auf $\mathfrak{p}$ mit einem Fixpunkt in T_i. Nach dem vorhin bemerkten kann $\sigma \neq \underline{1}$ für höchstens ein $i \in I$ gelten (nämlich nur für den Sockel T_i von $\mathfrak{p}$). Verneinen wir diese Aussage, so erhalten wir

SATZ 3.7. *Sei $\mathfrak{p} = \{t, \varkappa_{ij}\}$ eine endliche T-Struktur, σ^* eine Streckung auf t und ϱ eine i festlassende und auf $I-\{i\}$ reguläre Permutation, ferner seien σ^* und ϱ nicht beide $= \underline{1}$. Zu jedem solchen σ^*, zu jedem $i \in I$ mit höchstens einer Ausnahme und jedem auf $I-\{i\}$ regulärem ϱ gibt es dann $j, k \in I$ mit*

$$\varkappa_{j^\varrho k^\varrho} \neq \sigma^{*-1}\varkappa_{jk}\sigma^*. \tag{3.10}$$

§ 4. Beispiele von T-Strukturen

1. Wir wollen jetzt Beispiele von T-Strukturen, d.h. von Strukturen der Art $\{t, \varkappa_{ij}\}$ aufstellen, die keine Translationsstrukturen sind. Da $\mathfrak{P}^{\varkappa_{ij}}$ für $i \neq j$ nach (V) eine Zerlegung von t ist, müssen wir uns zunächst vergewissern, ob solche Zerlegungen überhaupt existieren können. Das ist in der Tat der Fall. Wir werden hier keine Übersicht über alle Zerlegungen einer vorgegebenen z.T. t geben, sondern uns mit einigen Beispielen begnügen, die zeigen sollen, daß die Untersuchungen über T-Strukturen nicht zu leeren Aussagen führen.

Um zu Beispielen von Zerlegungen einer z.T. zu gelangen, führen wir zunächst den Begriff einer Zerlegung in einem K-Rechtsmodul T ein. (Hierbei sei K ein Schiefkörper.) Ein *linearer Unterraum* von T ist eine Nebenklasse nach einem K-Untermodul $U \neq \{o\}$[9]) von T, d.h. eine Menge der Form $U+t$ mit $t \in T$. Zwei Unterräume $U+t$ und $U'+t'$ heißen zueinander windschief, wenn sie einen leeren Durchschnitt und außerdem U und U' nur das Nullelement o von T gemeinsam haben[10]), d.h. wenn $(U+t) \cap (U'+t') = \emptyset$ und $U \cap U' = \{o\}$ ist. Die Abbildungen $t \to t+a$ $(a \in T)$ sind die *Translationen* von T; sie bilden eine zu T isomorphe Gruppe T. Als eine *Zerlegung* von T definieren wir nun eine Menge paarweise windschiefer Unterräume von T, die ganz T überdecken.

Wir zeigen zunächst, daß jede Zerlegung $\mathfrak{Z}$ eines K-Moduls T auch eine Zerlegung einer geeignet gewählten z.T. ist, deren Punkte die Elemente von T sind, und deren Translationsgruppe mit der von T übereinstimmt. Zu diesem Zwecke konstruieren wir zu unserem $\mathfrak{Z}$ eine Partition $\mathfrak{P}$ des Moduls T

[9]) Wir schließen also hier, im Gegensatz zur üblichen Definition der linearen Unterräume, Punkte ausdrücklich aus.

[10]) Das hat folgende Bewandnis: Man schließe in üblicher Weise T projektiv ab, indem man als Punkte zu den Elementen von T noch die eindimensionalen Unterräume $t\,\mathsf{K}$ $(t \in T)$ als „uneigentliche Punkte" hinzunimmt und $t\,\mathsf{K}$ genau dann zum Unterraum $U+t'$ gehören soll, wenn $t\,\mathsf{K} \leq U$ gilt. Dann zeigt sich, daß zwei lineare Unterräume genau dann zueinander windschief liegen, wenn ihr Durchschnitt auch bei Hinzunahme ihrer uneigentlichen Punkte leer bleibt.

auf folgende Weise: Zu $\mathfrak{P}$ sollen zunächst alle diejenigen Untermoduln U von T gehören, zu denen es ein $t \in T$ mit $U+t \in \mathfrak{Z}$ gibt. Je zwei verschiedene Untermoduln dieser Art haben nur das Nullelement von T gemeinsam, weil die Räume von $\mathfrak{Z}$ paarweise windschief liegen. Ferner sollen alle diejenigen einrangigen Untermoduln $t\mathsf{K}$ $(t \in T)$ von T zu $\mathfrak{P}$ gehören, die in keinem der eben konstruierten U liegen. Die so gewonnene Menge $\mathfrak{P}$ von Untermoduln ist offensichtlich eine Partition von T, und die Struktur $t=[T, \mathfrak{P}]$ (vgl. II, §1) unsere gesuchte z.T.[11]); denn $\mathfrak{Z}$ ist offensichtlich Zerlegung von t (im Sinne unserer in §1, Ziffer 3, gegebenen Definition).

Um Beispiele von Zerlegungen von z.T. zu finden, genügt es also, Zerlegungen von K-Moduln T zu suchen. Der Einfachheit halber wollen wir hier annehmen, daß T über K einen endlichen Rang d habe. Die Menge aller linearen Unterräume von T bilden den d-dimensionalen affinen Raum $\mathfrak{A}$ über K. Durch Hinzufügung der uneigentlichen Hyperebene H erweitern wir $\mathfrak{A}$ zum d-dimensionalen projektiven Raum $\mathfrak{R}$. In $\mathfrak{R}$ bilden wir eine Partition $\mathfrak{Q}$, d.h. eine Menge paarweise fremd liegender Unterräume von $\mathfrak{R}$, die ganz $\mathfrak{R}$ überdecken. Für $d>2$ ist dies im allgemeinen auf mannigfache Art möglich [z.B. durch Kongruenzen im Sinne von André (1954), §8][12]). Aus $\mathfrak{Q}$ können wir jetzt sofort eine Zerlegung $\mathfrak{Z}=\bar{\mathfrak{Q}}$ in $\mathfrak{A}$ bilden: Als Unterräume aus $\bar{\mathfrak{Q}}$ nehmen wir die Mengen $\bar{Q}=Q-(Q\cap H)$ mit $Q \in \mathfrak{Q}$; man sieht sofort, daß für $\bar{\mathfrak{Q}}$ alle Bedingungen für eine Zerlegung erfüllt sind.

2. Nunmehr wollen wir Beispiele von T-Strukturen, die keine Translationsstrukturen sind, wirklich angeben. Nach den Untersuchungen der §§1 bis 3 müssen wir hierfür zu einer z.T. t kanonische Abbildungen $\varkappa_{ij}$ finden, die den Eigenschaften (I) bis (VI) von Satz 1.2 genügen. Die Hauptschwierigkeit liegt im allgemeinen im Beweis von (VI).

Beispiele unendlicher T-Strukturen (die sogar affine Ebenen sind) finden sich in André (1959). Hier wollen wir endliche T-Strukturen angeben, die allerdings keine affinen Ebenen sind. Da es eine T-Struktur mit genau zwei Transitivitätsgebieten hinsichtlich ihrer Translationsgruppe nicht geben kann (wie im nächsten Paragraphen bewiesen wird), muß dessen Anzahl mindestens drei sein. Wir werden jetzt endliche T-Strukturen der Charakteristik p mit genau drei Transitivitätsgebieten konstruieren. Um mit unserem Verfahren zum Ziel zu kommen, müssen wir $p \geqq 5$ voraussetzen.

Sei $t=(T, \mathfrak{L})$ eine z.T., in der eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ möglich ist. (Beispiele hierfür haben wir in der vorigen Ziffer angegeben.) Dies t soll der Stamm unserer gesuchten T-Struktur $\mathfrak{p}$ werden. Sei $\mathfrak{P}$ das Büschel aller durch einen festen Punkt $t \in T$ gehenden Geraden aus $\mathfrak{L}$ und $\varkappa$ eine Abbildung, die auf den Geraden von $\mathfrak{P}$ in folgender Weise definiert ist: $L^{\varkappa}$ sei diejenige Gerade aus $\mathfrak{Z}$, die zu $L \in \mathfrak{P}$ parallel ist (es gibt höchstens eine solche Gerade); existiert keine Gerade dieser Art, so sei $L^{\varkappa}=\emptyset$ gesetzt. Wir erweitern jetzt $\varkappa$ auf ganz $\mathfrak{L}$

[11]) Dies ist nur eine der Möglichkeiten, aus einer Zerlegung $\mathfrak{Z}$ eines K-Rechtsmoduls T eine z.T. mit derselben Punktmenge T und derselben Zerlegung zu finden.

[12]) Dagegen gibt es für $d=2$ keine solche Möglichkeit.

vermöge folgender Definition: Zu jedem $L \in \mathfrak{L}$ gibt es ein $L' \in \mathfrak{P}$ und eine Translation $\tau \in \mathsf{T}$ mit $L'^{\tau} = L$; hierbei ist $\tau \bmod \mathsf{T}(L')$ eindeutig bestimmt. Wir setzen

$$L^{\varkappa} = L'^{\tau\varkappa} = L'^{\varkappa\tau}; \tag{4.1}$$

hierdurch ist $L^{\varkappa}$ eindeutig bestimmt. Ferner setzen wir $\emptyset^{\varkappa} = \emptyset$. Die Abbildung $\varkappa$ ist eineindeutig auf der Menge $\mathfrak{L}_0$ aller $L \in \mathfrak{L}$ mit $L^{\varkappa} \neq \emptyset$ ($\mathfrak{L}_0$ ist offensichtlich die Menge derjenigen Geraden, die zu denen der Zerlegung parallel sind), mithin können wir $\varkappa^{-1}$ auf $\mathfrak{L}_0$ als die zu $\varkappa$ inverse Abbildung erklären; für $L \notin \mathfrak{L}_0$, d.h. $L^{\varkappa} = \emptyset$, setzen wir auch $L^{\varkappa^{-1}} = \emptyset$, ferner erweitern wir $\varkappa^{-1}$ durch die Festsetzung $\emptyset^{\varkappa^{-1}} = \emptyset$. Schließlich definieren wir noch $\varkappa^0$ durch $L^{\varkappa^0} = L$ für $L \in \mathfrak{L}_0$, $L^{\varkappa^0} = \emptyset$ für $L \notin \mathfrak{L}_0$ und $\emptyset^{\varkappa^0} = \emptyset$. Nun sind in üblicher Weise alle ganzzahligen Potenzen von $\varkappa$ erklärt und wir können sofort die *Potenzregel* $\varkappa^{m+n} = \varkappa^m \varkappa^n$ verifizieren.

Wir definieren jetzt durch

$$\varkappa_{ij} = \begin{cases} \varkappa^{j-i} & i \neq j \\ \underline{1} & i = j \end{cases} \qquad (i, j \in I = \{1, 2, 3\}) \tag{4.2}$$

die kanonischen Abbildungen $\varkappa_{ij}$ zu unserer gesuchten Struktur. Wir müssen zeigen, daß sie den Bedingungen (I) bis (VI) genügen. Unmittelbar aus (4.2) folgt (II), zusammen mit (4.1) auch (I) und (IV). Ferner ergibt sich sofort, daß alle $\mathfrak{L}(i, j)$ mit $i \neq j$ übereinstimmen; in diesem Fall gilt nämlich $\mathfrak{L}(i, j) = \mathfrak{L}_0$. Aus (4.2) und der oben zitierten Potenzregel folgt $\varkappa_{ij}\varkappa_{jk} = \varkappa_{ik}$, also auch $L^{\varkappa_{ij}\varkappa_{jk}} = L^{\varkappa_{ik}}$, mithin insbesondere (III).

Wir beweisen jetzt (V), d.h. daß $\mathfrak{P}^{\varkappa^k}$ [$k = j - i$ ($\neq 0$) gesetzt] eine Zerlegung von t ist. Zunächst bemerken wir, *daß* $L_1^{\tau_1}$ *und* $L_2^{\tau_2}$ ($\tau_1, \tau_2 \in \mathsf{T}$) *genau dann einen nichtleeren Durchschnitt haben, wenn es ein* $\tau^* \in \mathsf{T}$ *mit*

$$\tau_i \equiv \tau^* \quad (\mathsf{T}(L_i)) \qquad (i = 1, 2) \tag{4.3}$$

gibt. In der Tat, gilt (4.3), so ist $L_1^{\tau_1} \cap L_2^{\tau_2} = L_1^{\tau^*} \cap L_2^{\tau^*} = \{t^{\tau^*}\}$ ($L_1 \cap L_2 = \{t\}$ sei das Zentrum des Büschels $\mathfrak{P}$); existiere nun andererseits ein $u \in T$ mit $\{u\} = L_1^{\tau_1} \cap L_2^{\tau_2}$, es gibt ein $\tau^* \in \mathsf{T}$ mit $u = t^{\tau^*}$, hieraus folgt $L_i^{\tau_i} = L_i^{\tau^*}$ ($i = 1, 2$), mithin (4.3). Nun können wir zeigen: *Die Geraden* $L_1^{\varkappa^k}$ *und* $L_2^{\varkappa^k}$ [$L_1, L_2 \in \mathfrak{P} \cap \mathfrak{L}(i, j)$] *sind windschief.* Jedenfalls sind nämlich $L_1^{\varkappa^k}$ und $L_2^{\varkappa^k}$ nicht zueinander parallel, weil L_1 und L_2 es nicht sind. Wir müssen also jetzt noch $L_1^{\varkappa^k} \cap L_2^{\varkappa^k} = \emptyset$ beweisen. Wir nehmen das Gegenteil an. Aus $L_i^{\varkappa} \| L_i$ folgt die Existenz von $\tau_i \in \mathsf{T}$ mit $L_i^{\varkappa} = L_i^{\tau_i}$, hieraus $L_i^{\varkappa^k} = L_i^{\tau_i^k}$. Nach der zu (4.3) gemachten Bemerkung gibt es auf Grund unserer Annahme ein $\tau^* \in \mathsf{T}$ mit $\tau_i^k = \tau^*$ $(\mathsf{T}(L_i))$. Wegen $|k| = |j - i| < 3 < p$ (p ist die Charakteristik von t und auch von $\mathfrak{p}$) existiert ein l mit $kl \equiv 1$ (p), hieraus schließt man $\tau_i^{kl} = \tau_i \equiv \tau^{*l}$ $(\mathsf{T}(L_i))$. Wiederum wegen (4.3) würde daraus aber $L_1^{\varkappa} \cap L_2^{\varkappa} = L_1^{\tau_1} \cap L_2^{\tau_2} \neq 0$ folgen, im Widerspruch zu unserer Annahme, daß $\mathfrak{Z} = \mathfrak{P}^{\varkappa}$ eine Zerlegung sei.

Da t als endlich vorausgesetzt war, folgt aus Abzählungsgründen nunmehr sofort: $\mathfrak{P}^{\varkappa^k}$ *ist eine Zerlegung von* t. Denn $\mathfrak{P}^{\varkappa}$ ist voraussetzungsgemäß eine

Zerlegung, d.h. die Geraden von $\mathfrak{P}^{\varkappa}$ überdecken die Punktmenge T von t. Mithin ist $|T| = \sum_{L \in \mathfrak{P}^{\varkappa}} |L|$. Da $\mathfrak{P}^{\varkappa^k} = \mathfrak{P}^{\varkappa \cdot \varkappa^{k-1}}$ aus allen Geraden $L^{\varkappa^{k-1}}$ mit $L \in \mathfrak{P}^{\varkappa}$ besteht, $|L^{\varkappa^{k-1}}| = |L|$ ist, und die Geraden aus $\mathfrak{P}^{\varkappa^{k-1}}$ paarweise windschief liegen, folgt, daß auch sie ganz T überdecken. Damit sind für $\mathfrak{P}^{\varkappa^k}$ alle Eigenschaften einer Zerlegung gezeigt.

Es bleibt also nur noch (VI) zu beweisen. Das tun wir, indem wir alle möglichen Fälle durchdiskutieren:

(a) $\varrho = (123)$, $\sigma = \underline{1}$: Es ist $\varkappa_{13} \neq \varkappa_{21}$ wegen $\varkappa^2 \neq \varkappa^{-1}$, $\varkappa^3 \neq \underline{1}$; denn wir haben $p \geqq 5$ vorausgesetzt.

(b) $\varrho = (123)$, $\sigma \neq \underline{1}$ (wobei wir o.B.d.A. t als Zentrum der Streckung σ annehmen können): Es ist $\varkappa_{12} \neq \sigma^{-1}\varkappa_{23}\sigma$. Bei der gegenteiligen Annahme wäre nämlich $\mathfrak{Z} = \mathfrak{P}^{\varkappa} = \mathfrak{P}^{\varkappa_{12}} = \mathfrak{P}^{\sigma^{-1}\varkappa_{23}\sigma} = \mathfrak{P}^{\varkappa_{23}\sigma} = \mathfrak{P}^{\varkappa\sigma} = \mathfrak{Z}^{\sigma}$; dies ist aber für $\sigma \neq \underline{1}$ nicht möglich, denn es gibt $L \in \mathfrak{Z}$, die nicht durch t gehen, und für diese ist $L \| L^{\sigma} \neq L$. Ganz entsprechend sieht man:

(c) $\varrho = (132)$, $\sigma = \underline{1}$: Es ist $\varkappa_{12} \neq \varkappa_{31}$.

(d) $\varrho = (132)$, $\sigma \neq \underline{1}$: Es ist $\varkappa_{12} \neq \sigma^{-1}\varkappa_{23}\sigma$.

Damit haben wir alle überhaupt möglichen Fälle durchdiskutiert; (VI) ist erfüllt. *Unsere Struktur $\mathfrak{p} = \{t, \varkappa^{j-i}\}$ ist also eine T-Struktur mit genau drei Transitivitätsgebieten hinsichtlich ihrer Translationsgruppe* T.

3. Die einfachsten T-Strukturen dieser Art gewinnt man auf folgende Weise: Sei $\mathfrak{R}$ der dreidimensionale projektive Raum über dem Galois-Feld der Ordnung 5. In $\mathfrak{R}$ sei eine Kongruenz $\mathfrak{K}$ gegeben, d.h. eine Menge paarweise windschiefer Geraden, die $\mathfrak{R}$ überdecken. [Über die Bildung solcher Kongruenzen s. André (1954), insbesondere §8.] Durch Übergang von $\mathfrak{R}$ zum dreidimensionalen affinen Raum $\mathfrak{A}$ werden die eigentlichen Geraden aus $\mathfrak{K}$ zu einer Zerlegung $\overline{\mathfrak{K}} = \mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{A}$, wie am Ende von Ziffer 1 näher ausgeführt wurde. Dieses $\mathfrak{Z}$ ist auch Zerlegung einer z.T. $t = [T, \mathfrak{P}]$ (vgl. Ziffer 1)[13]) die $5^3 = 125$ Punkte und $5^2 + 5 + 1 = 31$ Geraden durch jeden Punkt enthält. Nunmehr können wir das in Ziffer 2 gebrachte Konstruktionsverfahren anwenden und erhalten eine T-Struktur mit $3 \cdot 125 = 375$ Punkten, 31 Geraden durch jeden Punkt, $6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 = 450$ Geraden mit je 5 Punkten (auf denen die Translationsgruppe transitiv ist) und $25(31 - 6) = 25^2 = 625$ Geraden mit je $5 \cdot 3 = 15$ Punkten.

§ 5. Über die Nichtexistenz von Parallelstrukturen mit bestimmten Eigenschaften

1. Im vorigen Paragraphen haben wir Beispiele von T-Strukturen angegeben, deren Translationsgruppe nicht transitiv auf den Punkten ist. Wir bringen jetzt zwei Sätze, die zeigen, daß die Anzahl der Transitivitätsgebiete einer T-Struktur nicht beliebig vorgeschrieben werden kann. Untersuchungen dieser Art können für Anwendungen auf affine Ebenen wichtig sein.

[13]) Hier ist T die elementar abelsche Gruppe vom Typ (5, 5, 5) und $\mathfrak{P}$ die Partition der eindimensionalen Untergruppen von T.

SATZ 5.1. *Es gibt keine T-Struktur, deren Punktmenge durch ihre Translationsgruppe in genau zwei Transitivitätsgebiete zerfällt.*

BEWEIS. Sei $\mathfrak{p}=\{t, \varkappa_{ij}\}$ eine T-Struktur mit genau zwei Transitivitätsgebieten hinsichtlich ihrer Translationsgruppe T; die Matrix $(\varkappa_{ij})$ ist dann zweireihig, und wir können $I=\{1, 2\}$ setzen. Wir müssen zeigen, daß wir die $\varkappa_{ij}$ nicht so wählen können, daß die Bedingungen (I) bis (VI) von Satz 1.2 alle erfüllt sind (s. §1, Ziffer 4). Hierzu machen wir zunächst die folgende Vorbemerkung: Sei $t=[T, \mathfrak{P}]$ der Stamm von $\mathfrak{p}=\{t, \varkappa_{ij}\}$. Nach II, §§1, 2 können wir T als eine zu T isomorphe Gruppe (mit dem neutralen Element o) auffassen. Die durch $p^\varepsilon=-p$ $(p\in T)$ definierte Abbildung ε ist eine o-Strekkung von t, was sofort aus II, Satz 4.2, folgt. Es ist $\varepsilon^2=\underline{1}$, ferner gilt

$$\tau^{-1}=\varepsilon\tau\varepsilon \tag{5.1}$$

für jedes $\tau\in\mathsf{T}$. Aus $o^\tau=t$ folgt nämlich $p^\tau=p+t$ (vgl. II, §1), und wir erhalten:

$$p^{\tau^{-1}}=p-t=-(-p+t)=(-p+t)^\varepsilon=(-p)^{\tau\varepsilon}=p^{\varepsilon\tau\varepsilon}$$

für jedes $p\in T$, also (5.1). Hieraus und aus den Folgerungen (f), (i) und (j) der Bedingungen (I) bis (VI) für kanonische Abbildungen (§1, Ziffer 5) erhalten wir jetzt ($\tau_{12,L}=\tau$ gesetzt)

$$L^{\varkappa_{21}}=L^{\varkappa_{12}^{-1}}=L^{\tau^{-1}}=L^{\varepsilon\tau}=L^{\varepsilon\varkappa_{12}\varepsilon}$$

für alle $L\in\mathfrak{L}$ mit $L^{\varkappa_{12}}\neq\emptyset$. Wegen Folgerung (e) ist aber $L^{\varkappa_{12}}=\emptyset$ gleichbedeutend mit $L^{\varkappa_{21}}=\emptyset$. Wir erhalten also

$$\varkappa_{21}=\varepsilon\varkappa_{12}\varepsilon=\varepsilon^{-1}\varkappa_{12}\varepsilon. \tag{5.2}$$

Dies widerspricht aber der Bedingung (VI) für $\varrho=(12)$ und $\sigma=\varepsilon$. Damit ist unser Satz bewiesen.

2. Jetzt sei $\mathfrak{p}=(P, \mathfrak{G})$ eine *endliche* T-Struktur deren Punktmenge P durch die Gruppe Π aller affin-axialen Kollineationen von $\mathfrak{p}$ in genau zwei Transitivitätsgebiete P_0 und P_1 zerlegt wird. Zur Untersuchung solcher T-Strukturen knüpfen wir an die Bemerkungen in Ziffer 5 von §3 an: O.B.d.A. sei P_0 auch Transitivitätsgebiet hinsichtlich der Translationsgruppe T, d.h. P_0 sei der Sockel von $\mathfrak{p}$. Durch T zerfällt P_1 in s Transitivitätsgebiete T_i $(i\in I)$, hierbei ist s die Ordnung jeder Streckungsgruppe Π_{u_0} mit $u_0\in P_0$. Als Indexmenge nehmen wir $I=\{0\}\cup\Pi_{u_0}$ (für ein festes $u_0\in P_0$), und zwar indizieren wir die Transitivitätsgebiete von T auf folgende Weise: Dem Sockel geben wir den Index 0, d.h. $P_0=T_0$. Einem beliebigen in P_1 gelegenen Transitivitätsgebiet von T geben wir $\underline{1}\in\Pi_{u_0}$ als Index. Jedes andere Transitivitätsgebiet in P_1 läßt sich aus $T_{\underline{1}}$ durch Anwendung genau einer Streckung $\sigma\in\Pi_{u_0}$ gewinnen; diesem geben wir den Index σ, d.h. wir setzen $T_\sigma=T_{\underline{1}}^\sigma$.

Um nun eine Übersicht über die zu $\mathfrak{p}$ gehörenden kanonischen Abbildungen zu bekommen, wenden wir zunächst Satz 3.4 an, der uns eine Übersicht über die Streckungen von $\mathfrak{p}$ gab. Formel (3.6) ergibt für $j=0$ in unserem Fall wegen der von uns soeben vorgenommenen Indizierung

$$\varkappa_{0\sigma}=\sigma^{-1}\varkappa_{0\underline{1}}\sigma. \tag{5.3}$$

[Hierbei haben wir das in (3.4) vorkommende σ^* mit σ identifiziert; dies konnten wir tun, weil σ durch die Wirkung auf die Punkte von P_0, also durch σ^*, eindeutig bestimmt ist.]

Aus (5.3) erhalten wir $\mathfrak{L}(0,\sigma)=\mathfrak{L}(0,\underline{1})$. [Zur Definition von $\mathfrak{L}(i,j)$ vgl. §1, Ziffer 5.] Mit Hilfe von (1.3) und (1.4) können wir nun $\mathfrak{L}(0,\sigma)=\mathfrak{L}(\sigma,0)=\mathfrak{L}(0,\sigma')=\mathfrak{L}(\sigma,0)\cap\mathfrak{L}(0,\sigma')\subseteqq\mathfrak{L}(\sigma,\sigma')$, also auch $\mathfrak{P}(0,\sigma)=\mathfrak{P}\cap\mathfrak{L}(0,\sigma)\subseteqq\mathfrak{P}(\sigma,\sigma')$ schließen. ($\mathfrak{P}$ ist das Büschel aller Geraden durch einen festen Punkt von T.) Sei $\mathfrak{P}(0,\sigma)=\{L^{(0)},\ldots,L^{(m)}\}$ und $\mathfrak{P}(\sigma,\sigma')=\{L^{(0)},\ldots,L^{(m')}\}$; wegen $\mathfrak{P}(0,\sigma)\subseteqq\mathfrak{P}(\sigma,\sigma')$ ist $m\leqq m'$. Nach (V) sind $\mathfrak{P}^{\varkappa_0\sigma}=\mathfrak{P}(0,\sigma)^{\varkappa_0\sigma}$ und für $\sigma\neq\sigma'$ auch $\mathfrak{P}^{\varkappa_\sigma\sigma'}$ Zerlegungen von t. Daraus folgt

$$|T|=\sum_{r=0}^{m}|L^{(r)}|=\sum_{r=0}^{m'}|L^{(r)}|$$

und somit $m=m'$, $\mathfrak{P}(0,\sigma)=\mathfrak{P}(\sigma,\sigma')$, also

$$\mathfrak{L}(0,\sigma)=\mathfrak{L}(\sigma,\sigma')\quad\text{für}\quad\sigma\neq\sigma'. \tag{5.4}$$

Sämtliche $\mathfrak{L}(i,j)$ $(i,j\in I=\{0\}\cup\Pi_{u_0})$ *mit* $i\neq j$ *stimmen also überein.* Somit vereinfacht sich (III) zu $\varkappa_{ij}\varkappa_{jk}=\varkappa_{ik}$ $(i,j,k\in I)$. Mit (5.3) erhalten wir jetzt

$$\varkappa_{\sigma\sigma'}=\varkappa_{\sigma 0}\varkappa_{0\sigma'}=\varkappa_{0\sigma}^{-1}\varkappa_{0\sigma'}=\sigma^{-1}\varkappa_{0\underline{1}}^{-1}\sigma\sigma'^{-1}\varkappa_{0\underline{1}}\sigma'. \tag{5.5}$$

Durch $\varkappa_{0\underline{1}}$ *sind somit alle kanonischen Abbildungen eindeutig bestimmt.*

3. Wir wollen nun den folgenden, für eine Anwendung auf affine Ebenen nützlichen Satz herleiten:

Satz 5.2. *Es gibt keine endliche T-Struktur* $\mathfrak{p}=(P,\mathfrak{G})$ *der Charakteristik* p *mit den beiden folgenden Eigenschaften:*

(a) *Durch die Gruppe* Π *aller affin-axialen Kollineationen von* $\mathfrak{p}$ *zerfällt die Menge* P *der Punkte von* $\mathfrak{p}$ *in genau zwei Transitivitätsgebiete.*

(b) *Die Anzahl der Transitivitätsgebiete, in die* P *durch die Translationsgruppe* T *von* $\mathfrak{p}$ *zerlegt wird, ist eine Potenz der Charakteristik* p *von* $\mathfrak{p}$.

Dem Beweis schicken wir einige Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 5.1[14]. *Die Streckungsgruppe* Π_{u_0} *ist (bis auf Isomorphie) die multiplikative Gruppe* $\mathsf{K}_0^\times$ *eines Galois-Feldes* K_0, *das Unterkörper des Kernes* K (vgl. II, §4) *des Stammes* t *von* $\mathfrak{p}$ *ist.*

Beweis. Nach Voraussetzung (b) von Satz 5.2 gibt es eine natürliche Zahl b derart, daß p^b die Anzahl der Transitivitätsgebiete hinsichtlich T ist, also gilt $|\Pi_{u_0}|=p^b-1$. Die Ordnung von K sei p^a. Aus $p^b-1\,|\,p^a-1=|\mathsf{K}^\times|$ folgt [vgl. André (1958), Hilfssatz 3.6] $b\,|\,a$, es gibt mithin einen Unterkörper K_0 von K mit der Ordnung p^b. Da $\mathsf{K}^\times$ als multiplikative Gruppe eines Galois-Feldes zyklisch ist, enthält $\mathsf{K}^\times$ nur eine Untergruppe der Ordnung p^b-1, also ist $\mathsf{K}_0^\times=\Pi_{u_0}$.

Wir können jetzt die 0 unserer Indexmenge I als Nullelement von K_0 auffassen; tun wir dies, so wird $I=\mathsf{K}_0$.

[14]) Vgl. auch André (1958), Hilfssatz 3.7.

HILFSSATZ 5.2. *Für alle* $\alpha \in \mathsf{K}_0$ *gilt*

$$\varkappa_{\underline{1},\alpha+\underline{1}} = \varkappa_{0\alpha}. \tag{5.6}$$

Zum Beweis machen wir die folgende Fallunterscheidung:

(a) $\alpha = 0$: Nach (II) ist in diesem Falle $\varkappa_{\underline{1}\underline{1}} = \varkappa_{00} = \underline{1}$.

(b) $\alpha + \underline{1} = 0$, d.h. $\alpha = -\underline{1} = \varepsilon$: Aus (5.3) und (5.2)[15]) erhalten wir $\varkappa_{0\varepsilon} = \varepsilon^{-1}\varkappa_{0\underline{1}}\varepsilon = \varkappa_{\underline{1}0}$, das ist aber (5.6) für unseren Fall.

(c) $\alpha \neq 0$, ε (d.h. α^{-1} und $(\alpha+\underline{1})^{-1}$ existieren): Um (5.6) für diesen Fall zu zeigen, verifizieren wir zunächst die folgende Identität:

$$\tau(\alpha+\underline{1}) = (\alpha+\underline{1})\,\tau\,\alpha^{-1}\,\tau\,\alpha; \tag{5.7}$$

hierbei ist τ eine beliebige Translation. Sei nämlich $q \in T$ ein beliebiger Punkt des Stammes t von $\mathfrak{p}$. Wir können $q^\tau = q + t$ für ein geeignetes $t \in T$ setzen (vgl. II, §1) und erhalten

$$\begin{aligned} q^{\tau(\alpha+\underline{1})} &= (q+t)^{\alpha+\underline{1}} = q^\alpha + q + t^\alpha + t = (q + q^{\alpha^{-1}} + t + t^{\alpha^{-1}})^\alpha = (q + q^{\alpha^{-1}} + t^{\alpha^{-1}})^{\tau\alpha} \\ &= (q^\alpha + q + t)^{\alpha^{-1}\tau\alpha} = (q^\alpha + q)^{\tau\alpha^{-1}\tau\alpha} = q^{(\alpha+\underline{1})\tau\alpha^{-1}\tau\alpha}, \end{aligned}$$

mithin (5.7). Man gewinnt daraus nach einfacher Umrechnung

$$\tau^{-1}(\alpha+\underline{1})^{-1}\,\tau\,(\alpha+\underline{1}) = \alpha^{-1}\,\tau\,\alpha. \tag{5.8}$$

Sei nun $L \in \mathfrak{L}(i,j)$ $[i \neq j]$. Nach Folgerung (i) [vgl. §1, Ziffer 5] gibt es eine Translation $\tau_{0\underline{1},L} = \tau$ mit $L^{\varkappa_{0\underline{1}}} = L^\tau$. Mit (5.3), (5.8) und (5.5) erhalten wir jetzt

$$L^{\varkappa_{0\alpha}} = L^{\alpha^{-1}\varkappa_{0\underline{1}}\alpha} = L^{\alpha^{-1}\tau\alpha} = L^{\tau^{-1}(\alpha+\underline{1})^{-1}\tau(\alpha+\underline{1})} = L^{\varkappa_{0\underline{1}}^{-1}(\alpha+\underline{1})^{-1}\varkappa_{0\underline{1}}(\alpha+\underline{1})} = L^{\varkappa_{\underline{1}0}\varkappa_{0,\alpha+\underline{1}}} = L^{\varkappa_{\underline{1},\alpha+\underline{1}}}$$

für alle $L \in \mathfrak{L}(i,j)$. Ist $L \notin \mathfrak{L}(i,j)$, so ist $L^{\varkappa_{0\alpha}} = L^{\varkappa_{\underline{1},\alpha+\underline{1}}} = 0$. Damit ist (5.6) vollständig gezeigt.

HILFSSATZ 5.3. *Für alle* $\alpha, \beta \in \mathsf{K}_0$ *gilt*

$$\varkappa_{\alpha+\underline{1},\beta+\underline{1}} = \varkappa_{\alpha\beta}. \tag{5.9}$$

Dies folgt sofort aus Hilfssatz 5.2 und (III) durch

$$\varkappa_{\alpha+\underline{1},\beta+\underline{1}} = \varkappa_{\alpha+\underline{1},\underline{1}}\varkappa_{\underline{1},\beta+\underline{1}} = \varkappa_{\underline{1},\alpha+\underline{1}}^{-1}\varkappa_{\underline{1},\beta+\underline{1}} = \varkappa_{0\alpha}^{-1}\varkappa_{0\beta} = \varkappa_{\alpha 0}\varkappa_{0\beta} = \varkappa_{\alpha\beta}.$$

Nunmehr sind wir in der Lage, Satz 5.2 zu beweisen. Die Abbildung $\alpha \to \alpha + \underline{1}$ ist nämlich eine auf $I = \mathsf{K}_0$ reguläre Permutation, und (5.9) ergibt somit einen Widerspruch zu Bedingung (VI) für kanonische Abbildungen. Eine in Satz 5.2 angegebene T-Struktur kann es also nicht geben.

4. Wir wenden jetzt Satz 5.2 auf endliche affine Ebenen an und beweisen einen Satz, der in ANDRÉ (1958) bereits auf etwas anderem Wege gezeigt wurde. Unter einer *T-Ebene* verstehen wir eine affine Ebene, die zugleich T-Struktur ist, m.a.W. eine affine Ebene, in der es nichtidentische Translationen in jeder Richtung gibt.

---

[15]) Die Formel (5.2) gilt nämlich, wie aus ihrer Herleitung sofort ersichtlich, allgemein und nicht nur für den dort behandelten Fall zweier Transitivitätsgebiete.

Satz 5.3. *Es gibt keine endliche T-Ebene mit genau zwei Transitivitätsgebieten hinsichtlich ihrer Gruppe der affin-axialen Kollineationen (d.h. Translationen und Streckungen)*[16].

Beweis. Sei $\mathfrak{A}$ eine endliche T-Ebene mit der im Satz genannten Eigenschaft. Nach Hilfssatz 3.5 von André (1958) ist die Anzahl der Transitivitätsgebiete hinsichtlich der Translationsgruppe T von $\mathfrak{A}$ eine Potenz der Charakteristik p. Da $\mathfrak{A}$ voraussetzungsgemäß eine T-Struktur ist, folgt die Nichtexistenz jetzt sofort aus Satz 5.2.

[16]) In André (1958) wurde, etwas allgemeiner als hier, sogar die Nichtexistenz von Ebenen mit nichtidentischen Translationen in mindestens zwei Richtungen (sog. t-Ebenen) mit diesen Eigenschaften bewiesen. Dieser Fall läßt sich aber leicht auf den von Satz 5.3 zurückführen, wie dort gezeigt wurde.

Literatur

André, J.: Über nicht-desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Math. Z. **60**, 156—186 (1954).

— Über Perspektivitäten in endlichen affinen Ebenen. Arch. Math. **9**, 228—235 (1958).

— Affine Ebenen mit genügend vielen Translationen. Math. Nachr. **19**, 204—210 (1959).

Zassenhaus, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie, Bd. I. Leipzig: Teubner 1937.

Braunschweig, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

(Eingegangen am 24. Oktober 1960)

Leichtweiss, K.
Math. Zeitschr. 76, 334—366 (1961)

Zur Riemannschen Geometrie in Grassmannschen Mannigfaltigkeiten

Von

Kurt Leichtweiss

Bekanntlich kann jede (reelle) differenzierbare Mannigfaltigkeit M mit (mindestens) einer Riemannschen Metrik versehen werden[1]). Um nun eine Auswahl unter allen möglichen Riemannschen Metriken von M zu treffen, kann man eine derartige Metrik etwa dadurch auszeichnen, daß man die Invarianz derselben gegenüber einer vorgegebenen Gruppe G von homöomorphen und differenzierbaren Selbstabbildungen von M verlangt. Besonders einfach werden die Verhältnisse, wenn M schon als homogener Raum G/g vorausgesetzt wird (G = zusammenhängende Liesche Gruppe, g = abgeschlossene Untergruppe von G), da dann G in einer einfach zu beschreibenden Weise auf M operiert. Es ist leicht einzusehen, daß in $M = G/g$ sicher eine gegen G invariante Riemannsche Metrik existiert, wenn g kompakt ist. É. Cartan konnte sogar zeigen, daß ein sog. „symmetrischer" homogener Raum M im Falle einer einfachen Gruppe G auch (von einem positiven konstanten Maßfaktor abgesehen) nur eine gegen G invariante Riemannsche Metrik besitzt[2]). Außerdem wies Cartan u.a. nach, daß die Riemannsche Krümmung aller gegen G invarianten Riemannschen Metriken eines symmetrischen und kompakten M überall nichtnegativ ist.

Musterbeispiele von kompakten und symmetrischen homogenen Räumen werden durch die reellen Grassmannschen Mannigfaltigkeiten

$$G_{l,m} = SO(l+m)/\big(O(l)\times O(m)\big) \cap SO(l+m)$$

und

$$\widetilde{G_{l,m}} = SO(l+m)/SO(l)\times SO(m)$$

bzw. die komplexen Grassmannschen Mannigfaltigkeiten

$$H_{l,m} = SU(l+m)/\big(U(l)\times U(m)\big) \cap SU(l+m)$$

($l \geqq 1$, $m \geqq 1$; $O(n)$ bzw. $SO(n)$ bzw. $U(n)$ bzw. $SU(n)$ = orthogonale bzw. spezielle orthogonale bzw. unitäre bzw. spezielle unitäre Gruppe vom Grade n) geliefert. Wegen der Einfachheit von $SO(n)$ im Falle $n \neq 4$ bzw. von $SU(n)$ allgemein muß also nach Cartan in $G_{l,m}$ und $\widetilde{G_{l,m}}$ im Falle $l+m \neq 4$ bzw. in $H_{l,m}$ allgemein eine durch Invarianz gegen $SO(l+m)$ bzw. $SU(l+m)$ ausgezeichnete, „kanonische" Riemannsche Metrik mit interessanten Eigen-

[1]) Siehe [1], theorem 4.

[2]) In Abschnitt 4.1 wird näher auf die Resultate Cartans eingegangen.

schaften existieren, während der Fall $l+m=4$ bei $G_{l,m}$ und $\widetilde{G}_{l,m}$ offenbar eine Ausnahme darstellt. Diese Tatsachen berechtigen uns zu der folgenden Frage: *Wie sieht eigentlich die kanonische Metrik der angegebenen Grassmannschen Mannigfaltigkeiten aus, und welche invarianten Riemannschen Metriken existieren im Ausnahmefall $l+m=4$ in $G_{l,m}$ und $\widetilde{G}_{l,m}$?* Die Antwort auf diese Frage bildet das Hauptanliegen unserer Arbeit.

Es erweist sich nun für die diesbezüglichen Überlegungen als zweckmäßig, nicht die von CARTAN verwandte und auf der Untersuchung von Lieschen Gruppen beruhende Methode heranzuziehen, sondern einen mehr geometrischen Weg einzuschlagen und von der Definition der Grassmannschen Mannigfaltigkeiten als Menge aller l-dimensionalen Untervektorräume des $(l+m)$-dimensionalen reellen bzw. komplexen Vektorraums auszugehen. Geeignete n-Beine von Vektoren als Funktionen von ebenfalls geeigneten lokalen Koordinaten der Grassmannschen Mannigfaltigkeiten liefern dann sowohl für die kanonische Metrik als auch für sämtliche gegen $SO(l+m)$ invarianten Riemannschen Metriken von $G_{l,m}$ und $\widetilde{G}_{l,m}$ im Fall $l+m=4$ brauchbare explizite Ausdrücke (Satz 1, Satz 3 und Satz 6). (In diesen treten innere Produkte bzw. Hermitesche Bilinearformen auf, die auf die Abhängigkeit der gefundenen Metriken von den Gruppen $SO(l+m)$ bzw. $SU(l+m)$ hinweisen!) Dabei zeigt sich, *daß in Wirklichkeit nur $l=m=2$ (bei reellen Grassmannschen Mannigfaltigkeiten) einen Ausnahmefall darstellt, dessen Sonderstellung auch durch die bekannte Tatsache $\widetilde{G}_{2,2}=S^2\times S^2$ ($S^2=$ zweidimensionale Sphäre) erklärbar ist. Hier hängt die Gesamtheit aller invarianten Riemannschen Metriken von zwei Parametern ab, während sie sonst stets einparametrig ist.* Der (nach einigen Vorbereitungen in Abschnitt 1.) in Abschnitt 2. dargelegte Beweis für diese Hauptresultate gelingt durch Zurückführung des Problems der Bestimmung aller gegen G invarianten Riemannschen Metriken auf das Problem, gewisse Darstellungen von g im Tangentialraum eines Punktes der betreffenden Grassmannschen Mannigfaltigkeit in irreduzible Bestandteile zu zerlegen, wozu nur wenige Tatsachen der Darstellungstheorie benötigt werden.

Im dritten Abschnitt der Arbeit werden weiter die Krümmungseigenschaften der Grassmannschen Mannigfaltigkeiten in bezug auf die invarianten Riemannschen Metriken untersucht. Mittels des Cartanschen Differentialformenkalküls lassen sich Krümmungstensor und somit auch Ricci-Tensor, Skalarkrümmung und Riemannsche Krümmung leicht explizit bestimmen. Man erhält dadurch die folgenden, teilweise Ergebnisse CARTANS bestätigenden Resultate: *Die mit der (einparametrigen) Riemannschen „Normalmetrik" versehenen Grassmannschen Mannigfaltigkeiten sind Einsteinsche Räume im Gegensatz zu den mit der (zweiparametrigen) „Ausnahmemetrik" versehenen Mannigfaltigkeiten $G_{2,2}$ und $\widetilde{G}_{2,2}$. Die Riemannsche Krümmung ist in jedem Fall überall nichtnegativ, aber nur dann überall positiv, wenn $l=1$ oder $m=1$ gilt, d.h. wenn es sich um (reelle bzw. komplexe) projektive Räume mit elliptischer Metrik handelt* (Satz 4, Satz 5 und 4.2).

In Abschnitt 4 fogt schließlich unter anderem die Charakterisierung der „Normalmetrik" der als algebraische Untermannigfaltigkeiten von projektiven Räumen aufgefaßten Grassmannschen Mannigfaltigkeiten als diejenige Riemannsche Metrik, die durch die elliptische Metrik der projektiven Räume induziert wird (Satz 7). Außerdem werden anstelle von invarianten Riemannschen Metriken allgemeiner invariante nichtausgeartete quadratische bzw. Hermitesche Differentialformen in unsere Betrachtungen miteinbezogen sowie „inhomogene" Grassmannsche Mannigfaltigkeiten $I_{l,m}$ untersucht, welche als Menge aller l-dimensionalen linearen Unterräume des $(l+m)$-dimensionalen reellen affinen Raums definiert sind. Dabei zeigt sich, daß $I_{l,m}$ zwar keine gegenüber der speziellen Bewegungsgruppe $SB(l+m)$ invariante Riemannsche Metrik (Satz 8), wohl aber ein gegen $SB(l+m)$ invariantes Volumelement besitzt, welches in der Integralgeometrie eine Rolle spielt.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß C. TELEMAN in einer kürzlich erschienenen Arbeit[3]) ähnliche Untersuchungen über Grassmannsche Mannigfaltigkeiten — allerdings mit anderen Methoden — angestellt hat.

1. Problemstellung und Ergebnisse über invariante Riemannsche Metriken in Grassmannschen Mannigfaltigkeiten

Bekanntlich ist die reelle Grassmannsche Mannigfaltigkeit $G_{l,m}$ als Menge aller $(l-1)$-dimensionalen projektiven Unterräume des $(l+m-1)$-dimensionalen reellen projektiven Raums — oder, was gleichbedeutend ist, — als Menge aller (unorientierten) l-dimensionalen Untervektorräume des $(l+m)$-dimensionalen reellen Vektorraums definiert ($l \geqq 1$, $m \geqq 1$). Ein „Punkt" o von $G_{l,m}$ wird dann etwa durch ein l-Bein von linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{e}_i$ des n-dimensionalen Vektorraums V_n dargestellt ($n = m+l$; $i = 1, \ldots, l$), welche den betreffenden Untervektorraum aufspannen. Ergänzt man dies l-Bein $\{\mathfrak{e}_i\}$ durch das m-Bein $\{\mathfrak{e}_\alpha\}$ ($\alpha = l+1, \ldots, n$) zu einem aus n linear unabhängigen Vektoren bestehenden n-Bein, so lassen sich die Untervektorräume der Nachbarpunkte von o durch Vektoren der Gestalt

$$\mathfrak{f}_i = \mathfrak{e}_i + \sum_{\alpha=l+1}^{n} u_{i\alpha}\,\mathfrak{e}_\alpha \qquad (i = 1, \ldots, l) \tag{1}$$

aufspannen. Zu verschiedenen Koeffizientengesamtheiten $(u_{i\alpha})$ von je lm reellen Zahlen gehören dabei verschiedene Untervektorräume, d.h. also auch verschiedene Punkte von $G_{l,m}$. Die Grassmannsche Mannigfaltigkeit ist infolgedessen eine reell analytische Mannigfaltigkeit der Dimension lm, und die Größen $u_{i\alpha}$ ($i = 1, \ldots, l$; $\alpha = l+1, \ldots, n$) bilden die durch das n-Bein $\{\mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_\alpha\}$ festgelegten Koordinaten der Umgebung des Punktes $o \in G_{l,m}$.

Ziel dieses Abschnittes ist es nun, auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit $G_{l,m}$ zunächst eine Riemannsche Metrik zu definieren, welche invariant ist gegenüber allen „eigentlich orthogonalen" Transformationen des V_n, d.h. allen linearen, orientierungserhaltenden Abbildungen des V_n, welche eine (ausgezeichnete) symmetrische Bilinearform $\langle \mathfrak{x}\,\mathfrak{y} \rangle$ ($\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V_n$) mit positiv definiter

[3]) Siehe [2].

quadratischer Form $\langle \mathfrak{x}\, \mathfrak{x} \rangle$ ungeändert lassen. Dazu ist folgendes zu bemerken: Die Elemente der reellen eigentlich orthogonalen Gruppe vom Grade n, welche mit $SO(n)$ bezeichnet sei, bilden jeden l-dimensionalen Untervektorraum des V_n wieder auf einen ebensolchen ab, sie permutieren also die Punkte von $G_{l,m}$ und zwar in transitiver Weise. Die gesuchte Riemannsche Metrik soll nun — präziser formuliert — gegenüber dieser Permutationsgruppe von $G_{l,m}$ invariant sein. Es erweist sich jetzt als zweckmäßig, die das lokale Koordinatensystem von $G_{l,m}$ in o bestimmenden Basisvektoren $\mathring{\mathfrak{e}}_i$ und $\mathring{\mathfrak{e}}_\alpha$ des V_n als orthonormiert vorauszusetzen: $\langle \mathring{\mathfrak{e}}_i\, \mathring{\mathfrak{e}}_j \rangle = \delta_{ij}$, $\langle \mathring{\mathfrak{e}}_\alpha\, \mathring{\mathfrak{e}}_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$, $\langle \mathring{\mathfrak{e}}_i\, \mathring{\mathfrak{e}}_\alpha \rangle = 0$ $(1 \leqq i, j \leqq l;\ +1 \leqq \alpha, \beta \leqq n)$. Dann bilden alle den Punkt o festlassende Elemente von $SO(n)$ eine Untergruppe H, die sich aus den durch

$$(2) \qquad \mathring{\mathfrak{e}}'_i = \sum_{j=1}^{l} a_{ji}\, \mathring{\mathfrak{e}}_j, \qquad \mathring{\mathfrak{e}}'_\alpha = \sum_{\beta=l+1}^{n} b_{\beta\alpha}\, \mathring{\mathfrak{e}}_\beta \qquad (1 \leqq i \leqq l;\ l+1 \leqq \alpha \leqq n)$$

gegebenen Transformationen zusammensetzt, wobei (a_{ij}) und $(b_{\alpha\beta})$ orthogonale Matrizen sind, deren Determinanten $\|a_{ij}\|$ und $\|b_{\alpha\beta}\|$ gleiches Vorzeichen haben. Das durch (2) gegebene Element von H führt den durch (1) bestimmten Punkt p von $G_{l,m}$ in einen Punkt p' über, dessen zugehöriger Untervektorraum nach (2) durch die Vektoren

$$\mathfrak{f}'_i = \sum_{j=1}^{l} a_{ji}\, \mathring{\mathfrak{e}}_j + \sum_{\alpha=l+1}^{n} u_{i\alpha} \Big(\sum_{\beta=l+1}^{n} b_{\beta\alpha}\, \mathring{\mathfrak{e}}_\beta \Big)$$

oder ebenso durch die Vektoren

$$(3) \qquad \mathfrak{g}'_i = \sum_{j=1}^{l} a_{ij}\, \mathfrak{f}'_j = \mathring{\mathfrak{e}}_i + \sum_{j=1}^{l} \sum_{\alpha=l+1}^{n} \sum_{\beta=l+1}^{n} a_{ij}\, u_{j\alpha}\, b_{\beta\alpha}\, \mathring{\mathfrak{e}}_\beta \qquad (i = 1, \ldots, l)$$

aufgespannt wird. Vergleich von (3) mit der Darstellung (1) ergibt für die Koordinaten $u'_{i\alpha}$ von p' die Beziehungen:

$$u'_{i\alpha} = \sum_{j=1}^{l} \sum_{\beta}^{n} a_{ij}\, b_{\alpha\beta}\, u_{j\beta} \qquad (i = 1, \ldots, l;\ \alpha = l+1, \ldots, n).$$

Die Untergruppe H von $SO(n)$ induziert in dem Tangentialraum T von $G_{l,m}$ im Punkt o eine Gruppe Γ von linearen Transformationen:

$$(4) \qquad x'_{i\alpha} = \sum_{j=1}^{l} \sum_{\beta=l+1}^{n} a_{ij}\, b_{\alpha\beta}\, x_{j\beta} \qquad (i = 1, \ldots, l;\ \alpha = 1+l, \ldots, n),$$

die sog. „lineare Isotropiegruppe" von $G_{l,m}$ bezüglich $SO(n)$ ($x_{i\alpha}$ = Komponenten der Vektoren von T!), wobei jedes Element von Γ auf Grund von (4) als Tensorprodukt der beiden durch (2) gegebenen orthogonalen Transformationen aufgefaßt werden kann[4]). Die Gruppe Γ soll deshalb auch das „eingeschränkte[5]) Tensorprodukt" der orthogonalen Gruppen $O(l)$ und $O(m)$ vom Grade l und m genannt werden, welches wir mit $(O(l) \otimes O(m))^*$ bezeichnen wollen. Aus den Orthogonalitätsrelationen der Matrizen (a_{ij}) und $(b_{\alpha\beta})$ folgt,

[4]) Zur Definition des Tensorprodukts von linearen Transformationen vgl. [3], § 1 n^0 4.

[5]) Die Matrizen (a_{ij}) und $(b_{\alpha\beta})$ sind nämlich der Einschränkung $\|a_{ij}\|\, \|b_{\alpha\beta}\| = 1$ unterworfen.

daß die Elemente von $(O(l)\otimes O(m))^*$ orthogonale Transformationen sind, was durch die Formel

$$(O(l)\otimes O(m))^* \subseteq O(l\,m) \tag{5}$$

zum Ausdruck gebracht werden soll.

Nimmt man jetzt einmal an, es existiere auf $G_{l,m}$ eine gegenüber $SO(n)$ invariante Riemannsche Metrik, so ist dies a fortiori auch in bezug auf H der Fall. Die Koeffizienten des metrischen Fundamentaltensors von $G_{l,m}$ im Punkt o sind dann die Koeffizienten einer gegenüber allen Transformationen (4) invarianten, positiv definiten quadratischen Form des Tangentialraums T. Wenn wir aber umgekehrt eine derartige, auf T definierte quadratische Form gefunden haben, so werde die zugehörige Differentialform $(ds^2)_0$ als metrische Fundamentalform von $G_{l,m}$ im Punkt o definiert. Die metrische Fundamentalform in einem beliebigen anderen Punkt q von $G_{l,m}$ sei weiter das Bild von $(ds^2)_0$ bei derjenigen linearen Abbildung von T auf den Tangentialraum von $G_{l,m}$ in q, welche durch irgendein Element von $SO(n)$ induziert wird, das o in q überführt[6]). Auf diese Weise wird $G_{l,m}$ zu einem Riemannschen Raum mit einer Metrik, welche gegenüber $SO(n)$ invariant ist. *Die Existenz einer gegenüber $SO(n)$ invarianten Riemannschen Metrik in $G_{l,m}$ ist also gleichbedeutend mit der Existenz einer gegenüber $\Gamma=(O(l)\otimes O(m))^*$ invarianten, positiv definiten quadratischen Form auf T.*

Wegen (5) läßt sich nun sofort eine quadratische Form angeben, die gegenüber den Transformationen von $(O(l)\otimes O(m))^*$ invariant ist, nämlich $\sum_{i=1}^{l}\sum_{\alpha=l+1}^{n}(x_{i\alpha})^2$. Ihr entspricht nach unseren eben angestellten Überlegungen eine Riemannsche Metrik von $G_{l,m}$, die symbolisch[7]) in der Form

$$ds^2=\sum_{i=1}^{l}\sum_{\alpha=l+1}^{n}(\langle \mathfrak{e}_\alpha\, d\mathfrak{e}_i\rangle)^2 \tag{6}$$

geschrieben werden kann und sich tatsächlich als gegenüber $SO(n)$ invariant erweist. Es fragt sich jetzt, ob es noch eine andere gegenüber $SO(n)$ invariante Riemannsche Metrik geben kann. Darüber gibt der folgende Satz Auskunft:

SATZ 1. *Falls nicht gerade $l=m=2$ gilt, ist die durch* (6) *gegebene Riemannsche Metrik, von einem konstanten positiven Proportionalitätsfaktor λ abgesehen, die einzige gegenüber allen Transformationender Gruppe $SO(n)$ invariante Riemannsche Metrik der reellen Grassmannschen Mannigfaltigkeit $G_{l,m}$.*

Im Falle $l=m=2$ wird dagegen die Gesamtheit aller gegen $SO(n)$ invarianten Riemannschen Metriken von $G_{l,m}$ durch den Ausdruck:

$$\begin{cases} ds^2=\lambda\left((\langle \mathfrak{e}_3\, d\mathfrak{e}_1\rangle)^2+(\langle \mathfrak{e}_3\, d\mathfrak{e}_2\rangle)^2+(\langle \mathfrak{e}_4\, d\mathfrak{e}_1\rangle)^2+(\langle \mathfrak{e}_4\, d\mathfrak{e}_2\rangle)^2\right)+ \\ \quad +2\mu\left((\langle \mathfrak{e}_3\, d\mathfrak{e}_1\rangle)(\langle \mathfrak{e}_4\, d\mathfrak{e}_2\rangle)-(\langle \mathfrak{e}_3\, d\mathfrak{e}_2\rangle)(\langle \mathfrak{e}_4\, d\mathfrak{e}_1\rangle)\right) \\ \qquad (\lambda,\mu=\text{reell und konstant};\ \lambda>|\mu|) \end{cases} \tag{7}$$

gegeben.

[6]) Wegen der erwähnten Invarianzeigenschaft der auf T definierten quadratischen Form spielt die Auswahl des o in q abbildenden Elements aus $SO(n)$ hier keine Rolle.

[7]) In Abschnitt 3 dieser Arbeit wird diese Symbolik näher erläutert werden.

Man kann nun analog zum bisherigen auch gegenüber der Gruppe aller orthogonalen Transformationen des V_n invariante Riemannsche Metriken von $G_{l,m}$ untersuchen und findet darüber

Satz 2. *Die durch* (6) *gegebene Riemannsche Metrik ist bis auf einen konstanten positiven Proportionalitätsfaktor* λ *die einzige gegen* $O(n)$ *invariante Riemannsche Metrik auf der reellen Grassmannschen Mannigfaltigkeit* $G_{l,m}$[8]. Hier spielt der Fall $l=m=2$ also keine Ausnahmerolle.

Schließlich stellt sich noch die Frage nach gegenüber $SO(n)$ bzw. $O(n)$ invarianten Riemannschen Metriken auf der Mannigfaltigkeit $\widetilde{G_{l,m}}$ aller *orientierten* l-dimensionalen Untervektorräume des $(l+m)$-dimensionalen reellen Vektorraums. Jetzt gilt:

Satz 3. *Die Sätze* 1 *und* 2 *bleiben wörtlich richtig, wenn darin* $G_{l,m}$ *überall durch* $\widetilde{G_{l,m}}$ *ersetzt wird.*

2. Beweise der in Abschnitt 1. angeführten Sätze

Wir haben bereits in 1. nachgewiesen, daß den gegenüber $SO(n)$ invarianten Riemannschen Metriken von $G_{l,m}$ umkehrbar eindeutig solche positiv definite quadratische Formen auf einem Tangentialraum T von $G_{l,m}$ entsprechen, welche gegenüber allen Transformationen der linearen Isotropiegruppe von $G_{l,m}$ bezüglich $SO(n)$ invariant sind. Auf dieselbe Weise sieht man ein, daß den gegenüber $O(n)$ invarianten Riemannschen Metriken auf $G_{l,m}$ die gegenüber der linearen Isotropiegruppe von $G_{l,m}$ bezüglich $O(n)$, d.h. gegenüber $O(l)\otimes O(m)$ invarianten positiv definiten quadratischen Formen auf T entsprechen, während den gegen $SO(n)$ bzw. $O(n)$ invarianten Riemannschen Metriken von $\widetilde{G_{l,m}}$ die gegenüber den linearen Isotropiegruppen $SO(l)\otimes SO(m)$ bzw. $SO(l)\otimes O(m)$ invarianten positiv definiten quadratischen Formen auf T eineindeutig zugeordnet sind[9].

Unsere Aufgabe ist also jetzt, alle gegenüber einer bekannten Gruppe von — wie sich jeweils zeigt — orthogonalen Transformationen invarianten, positiv definiten quadratischen Formen auf T zu bestimmen. Dieses Problem läßt sich auf ein Problem der Darstellungstheorie von Gruppen zurückführen. Dazu benötigen wir:

Definition 1. *Ein Untervektorraum* W *des (reellen) Vektorraums* V *heißt gegenüber einer Gruppe* $\mathfrak{G}$ *von linearen Transformationen von* V *invariant, wenn jedes Element von* $\mathfrak{G}$ *jeden Vektor aus* W *wieder in einem Vektor aus* W *überführt.*

Definition 2. *Ein gegenüber* $\mathfrak{G}$ *invarianter nicht nulldimensionaler Untervektorraum* W *von* V *heißt bezüglich* $\mathfrak{G}$ *reduzibel, wenn* W *einen vom Nullraum*

[8]) Satz 2 enthält für $l=1$ die Tatsache, daß die bis auf einen Faktor einzige, gegen alle Bewegungen des auf dem projektiven Raum $G_{1,m}$ definierten elliptischen Raums E_m invariante Riemannsche Metrik des $G_{1,m}$, die sog. „elliptische" Metrik von $G_{1,m}$, von der Cayley-Kleinschen Metrik des E_m induziert wird.

[9]) Die Tensorprodukte sind hier in Komplexschreibweise zu verstehen.

und W verschiedenen, gegenüber $\mathfrak{G}$ invarianten Untervektorraum W' enthält. Anderenfalls wird W als bezüglich $\mathfrak{G}$ irreduzibel bezeichnet.

Ist speziell V ein euklidischer Vektorraum von endlicher Dimension und $\mathfrak{G}$ eine Gruppe von orthogonalen Transformationen, so ist mit jedem gegen $\mathfrak{G}$ invarianten Untervektorraum W von V auch das orthogonale Komplement von W gegen $\mathfrak{G}$ invariant; man kann also in diesem Falle V als direkte Summe von endlich vielen, paarweise orthogonalen, (bezüglich $\mathfrak{G}$) invarianten und irreduziblen Untervektorräumen darstellen. Jetzt gilt:

HILFSSATZ 1. *Läßt der endlichdimensionale euklidische Vektorraum V (von der Reihenfolge der Summanden abgesehen) nur eine einzige Darstellung als direkte Summe von paarweise orthogonalen und bezüglich der Gruppe $\mathfrak{G}$ von orthogonalen Transformationen von V invarianten sowie irreduziblen Untervektorräumen $W^{(r)}$ $(r=1, \ldots, s)$ zu, so wird die Gesamtheit aller auf V definierten und gegen $\mathfrak{G}$ invarianten, positiv definiten quadratischen Formen durch*

$$(8) \qquad \sum_{r=1}^{s} \lambda_r \left(\sum_{t=n_{r-1}+1}^{n_r} (y_t)^2 \right) \qquad (\lambda_r > 0;\ 0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_s = \operatorname{Dim} V)$$

gegeben, wenn man für V eine solche orthonormierte Basis zugrundelegt, daß $W^{(r)}$ durch $y_t = 0$ mit $1 \leqq t \leqq n_{r-1}$, $n_r + 1 \leqq t \leqq n_s$ dargestellt wird.

BEWEIS. Trivialerweise sind alle quadratischen Formen (8) positiv definit und gegen $\mathfrak{G}$ invariant. Wir nehmen nun an, die (in Matrizenschreibweise dargestellte) quadratische Form $\mathfrak{x}^* \mathfrak{A} \mathfrak{x}$ sei auf V definiert, positiv definit und gegenüber allen orthogonalen Transformationen $\mathfrak{x}' = \mathfrak{T} \mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{G}$ invariant $(\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A},\ \mathfrak{T}^* = \mathfrak{T}^{-1})$. Dann folgt aus der Identität $\mathfrak{x}^* \mathfrak{A} \mathfrak{x} = \mathfrak{x}^* (\mathfrak{T}^{-1})^* \mathfrak{A} \mathfrak{T}^{-1} \mathfrak{x}$ zusammen mit $\mathfrak{T}^* = \mathfrak{T}^{-1}$: $\mathfrak{A} = \mathfrak{T} \mathfrak{A} \mathfrak{T}^{-1}$. Wenn jetzt λ ein (sicher reeller) Eigenwert und V_λ der zugehörige Eigenraum der symmetrischen Matrix $\mathfrak{A}$ ist, so gilt für einen beliebigen Vektor $\mathfrak{v} \in V_\lambda$ wegen der eben abgeleiteten Matrixgleichung:

$$(\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{E})(\mathfrak{T} \mathfrak{v}) = \left(\mathfrak{T} (\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{E}) \mathfrak{T}^{-1}\right)(\mathfrak{T} \mathfrak{v}) = \mathfrak{T} \left((\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{E}) \mathfrak{v}\right) = 0,$$

d.h. $\mathfrak{T} \mathfrak{v} \in V_\lambda$. Damit haben wir in V_λ einen gegenüber $\mathfrak{G}$ invarianten Untervektorraum von V gefunden und können, da dies für jeden Eigenwert von $\mathfrak{A}$ gilt, V als direkte Summe aller (paarweise orthogonalen und gegen $\mathfrak{G}$ invarianten) Eigenräume von $\mathfrak{A}$ darstellen. Weil nun weiter jeder Eigenraum von $\mathfrak{A}$ wieder direkte Summe von paarweise orthogonalen, bezüglich $\mathfrak{G}$ invarianten und irreduziblen Untervektorräumen ist, erhalten wir so durch Aufspaltung aller Eigenräume eine Summendarstellung von V mit paarweise orthogonalen, irreduziblen, invarianten Untervektorräumen als Summanden. Letztere müssen also wegen der vorausgesetzten Eindeutigkeit einer derartigen Darstellung mit den gegebenen Vektorräumen $W^{(r)}$ $(r=1, \ldots, s)$ übereinstimmen; d.h. jeder Eigenraum von $\mathfrak{A}$ ist direkte Summe von einigen $W^{(r)}$. Wählt man jetzt für V die im Hilfssatz angegebene orthonormierte Basis und nennt die Komponenten eines beliebigen Vektors aus V bezüglich dieser Basis y_t, so nimmt die betrachtete quadratische Form die Gestalt $\mathfrak{y}^* \mathfrak{B} \mathfrak{y}$ an ($\mathfrak{y}$ = Spaltenmatrix mit den Elementen y_t), wobei $\mathfrak{B}$ eine Diagonalmatrix

mit den Diagonalelementen b_t ist $(t=1, \ldots, n_s)$. Hierbei sind alle b_t mit $n_{r-1}<t\leqq n_r$ und $W^{(r)}\subseteq V_\lambda$ gleich dem Eigenwert λ des zu λ gehörenden Eigenraums V_λ von $\mathfrak{A}$, so daß $\mathfrak{y}^*\mathfrak{B}\mathfrak{y}$ in der Tat die in (8) angegebene Gestalt besitzt, womit Hilfssatz 1 bewiesen ist. q.e.d.

Auf Grund von Hilfssatz 1 können nun die Beweise von Satz 1, Satz 2 und Satz 3 auf den Beweis der folgenden Sätze zurückgeführt werden:

Satz 1'. *Falls nicht gerade $l=m=2$ gilt, ist der Tangentialraum T von $G_{l,m}$ bezüglich der Gruppe $(O(l)\otimes O(m))^*$ irreduzibel. Im Falle $l=m=2$ läßt sich dagegen T auf die einzig mögliche Weise als direkte Summe der beiden orthogonalen und bezüglich $(O(2)\otimes O(2))^*$ invarianten und irreduziblen Untervektorräumen $T^{(1)}$ und $T^{(2)}$ darstellen, welche durch $x_{13}-x_{24}=0$, $x_{23}+x_{14}=0$ und $x_{13}+x_{24}=0$, $x_{23}-x_{14}=0$ gegeben sind.*

Satz 2'. *T ist bezüglich der Gruppe $O(l)\otimes O(m)$ immer irreduzibel.*

Satz 3'. *Die Sätze 1' und 2' bleiben wörtlich richtig, wenn darin $(O(l)\otimes O(m))^*$ bzw. $O(l)\otimes O(m)$ durch $SO(l)\otimes SO(m)$ bzw. $SO(l)\otimes O(m)$ ersetzt wird.*

Um dies einzusehen, müssen wir nur noch benutzen, daß im Falle $l=m=2$ alle gegen $(O(2)\otimes O(2))^*$ bzw. $SO(2)\otimes SO(2)$ invarianten, positiv definiten, quadratischen Formen auf T nach Einführung der in Hilfssatz 1 angegebenen Komponententransformation

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\,y_1&=x_{13}+x_{24}\\ \sqrt{2}\,y_2&=x_{23}-x_{14}\\ \sqrt{2}\,y_3&=x_{13}-x_{24}\\ \sqrt{2}\,y_4&=x_{23}+x_{14}\end{aligned}$$

die in (8) angegebene Form:

$$\lambda_1\left((y_1)^2+(y_2)^2\right)+\lambda_2\left((y_3)^2+(y_4)^2\right)\qquad(\lambda_1>0,\ \lambda_2>0)$$

annehmen, woraus sich durch Einsetzen ihre ursprüngliche Gestalt:

$$\lambda\left((x_{13})^2+(x_{23})^2+(x_{14})^2+(x_{24})^2\right)+2\mu\,(x_{13}\,x_{24}-x_{23}\,x_{14})$$

mit $\lambda=\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)$ und $\mu=\frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2)$, d.h. $\lambda_1=\lambda+\mu>0$ und $\lambda_2=\lambda-\mu>0$ oder $\lambda>|\mu|$ ergibt. Diesen quadratischen Formen entsprechen gerade die gegen $SO(4)$ invarianten Riemannschen Metriken (7) von $G_{2,2}$ bzw. $\widetilde{G_{2,2}}$.

Den Beweisen von Satz 1', Satz 2' und Satz 3' schicken wir zunächst weitere Hilfssätze voraus:

Hilfssatz 2. *Gegeben sei ein endlichdimensionaler Vektorraum V und eine Gruppe $\mathfrak{G}$ von linearen Transformationen von V. Läßt sich dann V sowohl als direkte Summe der bezüglich $\mathfrak{G}$ invarianten und irreduziblen Untervektorräume $V^{(r)}$ $(r=1, \ldots, s)$ als auch als direkte Summen der bezüglich $\mathfrak{G}$ invarianten und irreduziblen Untervektorräume $W^{(r')}$ $(r'=1, \ldots, s')$ darstellen, so gilt $s'=s$, und es existiert eine solche Permutation π der Zahlen $1, \ldots, s$, daß $V^{(r)}$ und $W^{(\pi(r))}$ dieselbe Dimension besitzen $(r=1, \ldots, s)$.*

Einen Beweis dieses Satzes für den Fall eines komplexen Vektorraums V findet man in [4], S. 48; er läßt sich genau so für einen reellen Vektorraum V führen.

HILFSSATZ 3. *Gestattet V die beiden Darstellungen $V = V^{(1)} \dotplus V^{(2)}$ und $V = W^{(1)} \dotplus W^{(2)}$ als direkte Summe der gegen $\mathfrak{G}$ invarianten, irreduziblen Untervektorräume $V^{(1)}$, $V^{(2)}$ und $W^{(1)}$, $W^{(2)}$ mit*

$$\operatorname{Dim} V^{(1)} = \operatorname{Dim} W^{(1)} > \operatorname{Dim} V^{(2)} = \operatorname{Dim} W^{(2)}$$

(vgl. Hilfssatz 2!), *so gilt $V^{(1)} = W^{(1)}$ und $V^{(2)} = W^{(2)}$*[10]).

BEWEIS. Wegen $\operatorname{Dim}(V^{(1)} \cap W^{(1)}) \geqq \operatorname{Dim} V^{(1)} + \operatorname{Dim} W^{(1)} - \operatorname{Dim} V = \operatorname{Dim} V^{(1)} - \operatorname{Dim} V^{(2)} > 0$ ist $V^{(1)} \cap W^{(1)}$ ein vom Nullraum verschiedener, gegen $\mathfrak{G}$ invarianter Untervektorraum von $V^{(1)}$. Da aber $V^{(1)}$ als bezüglich $\mathfrak{G}$ irreduzibel vorausgesetzt war, gilt $V^{(1)} \cap W^{(1)} = V^{(1)}$, woraus zusammen mit $\operatorname{Dim} V^{(1)} = \operatorname{Dim} W^{(1)}$ $V^{(1)} = W^{(1)}$ folgt. Wir betrachten nun den Verbindungsraum U von $V^{(2)}$ und $W^{(2)}$. U ist gegen alle Transformationen aus $\mathfrak{G}$ invariant, und $\operatorname{Dim} U \leqq \operatorname{Dim} V^{(2)} + \operatorname{Dim} W^{(2)} < \operatorname{Dim} V$. Aus diesem Grunde kann U nicht $V^{(1)}$ enthalten, da U sonst wegen $U \geqq V^{(2)}$ mit V identisch sein müßte. $U \cap V^{(1)}$ ist also als gegen $\mathfrak{G}$ invarianter, echter Untervektorraum des irreduziblen Vektorraums $V^{(1)}$ gleich dem Nullraum; d. h. $0 = \operatorname{Dim}(U \cap V^{(1)}) \geqq \operatorname{Dim} U + \operatorname{Dim} V^{(1)} - \operatorname{Dim} V$, oder $\operatorname{Dim} U \leqq \operatorname{Dim} V^{(2)} = \operatorname{Dim} W^{(2)}$. Daraus folgt aber zusammen mit $U \geqq V^{(2)}$ und $U \geqq W^{(2)}$: $U = V^{(2)} = W^{(2)}$, und die Eindeutigkeit der in Hilfssatz 3 angegebenen Summendarstellungen ist gezeigt. q.e.d.

HILFSSATZ 4. *Ist $\mathfrak{C}$ eine quadratische l-reihige und $\mathfrak{D}$ eine quadratische m-reihige Matrix, welche beide direkte Summen der quadratischen Matrizen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ bzw. $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ sind: $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 \dot{-} \mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \dot{-} \mathfrak{D}_2$*[11]), *so gilt für das nach* (4) *gebildete Tensorprodukt von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$, wenn man für die in* (4) *auftretenden Indexkombinationen (i, α) und (j, β) $(i, j = 1, \ldots, l;\ \alpha, \beta = l+1, \ldots, n)$ die Reihenfolge $(1, l+1), \ldots, (l, l+1), (1, l+2), \ldots, (l, l+2), \ldots, (1, n), \ldots, (l, n)$ festlegt $(n = l+m)$:*

$$\mathfrak{C} \otimes_1 (\mathfrak{D}_1 \dotplus \mathfrak{D}_2) = (\mathfrak{C} \otimes_1 \mathfrak{D}_1) \dotplus (\mathfrak{C} \otimes_1 \mathfrak{D}_2). \tag{9}$$

Bei Änderung der angegebenen Reihenfolge in die Reihenfolge $(1, l+1), \ldots, (1, n), (2, l+1), \ldots, (2, n), \ldots, (l, l+1), \ldots, (l, n)$ ist dagegen:

$$(\mathfrak{C}_1 \dotplus \mathfrak{C}_2) \otimes_2 \mathfrak{D} = (\mathfrak{C}_1 \otimes_2 \mathfrak{D}) \dotplus (\mathfrak{C}_2 \otimes_2 \mathfrak{D})^{12}). \tag{10}$$

Der Beweis dieses Hilfssatzes erfolgt durch einfache rechnerische Verifikation[13]).

---

[10]) Es würde für die Gültigkeit dieses Hilfssatzes genügen, nur $V^{(1)}$ als irreduzibel vorauszusetzen.

[11]) Zu dieser Schreibweise vgl. [4], S. 16.

[12]) Mit dem an das Zeichen $\otimes$ angehängten Index wird angedeutet, daß das Tensorprodukt von Matrizen nicht eindeutig definierbar ist, sondern von der Anordnung gewisser Indexkombinationen abhängt.

[13]) Vgl. auch [4], S. 179.

Beweis von Satz 1'.

a) Fall $l=m=2$.

Zunächst bestimmt sich nach (4) für ein beliebiges Element von $\big(O(2)\otimes O(2)\big)^*$ die Transformationsmatrix bezüglich des Komponentensystems $(x_{13}, x_{23}, x_{14}, x_{24})$ von T zu:

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\varepsilon\sin\varphi & \varepsilon\cos\varphi \end{pmatrix} \otimes_1 \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\varepsilon\sin\psi & \varepsilon\cos\psi \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\psi & \sin\varphi\sin\psi \\ -\varepsilon\sin\varphi\cos\psi & \varepsilon\cos\varphi\cos\psi & -\varepsilon\sin\varphi\sin\psi & \varepsilon\cos\varphi\sin\psi \\ -\varepsilon\cos\varphi\sin\psi & -\varepsilon\sin\varphi\sin\psi & \varepsilon\cos\varphi\cos\psi & \varepsilon\sin\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\cos\psi \end{pmatrix}^{14}). \\ (0\leqq\varphi<2\pi,\ 0\leqq\psi<2\pi,\ \varepsilon=+1 \text{ oder } -1). \end{array}\right.$$

Daraus errechnet sich unmittelbar, daß der Vektor $(a, b, -b, a)$ ($a, b =$ beliebig) aus T bei der zur Matrix (11) gehörenden Transformation in den Vektor

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} \big(a\cos(\varphi-\psi)+b\sin(\varphi-\psi),\ -\varepsilon a\sin(\varphi-\psi)+\varepsilon b\cos(\varphi-\psi), \\ \quad \varepsilon a\sin(\varphi-\psi)-\varepsilon b\cos(\varphi-\psi),\ a\cos(\varphi-\psi)+b\sin(\varphi-\psi)\big) \end{array}\right.$$

übergeht. Dies bedeutet aber, daß der durch die Gleichungen $x_{13}-x_{24}=0$, $x_{23}+x_{14}=0$ gegebene, zweidimensionale Untervektorraum $T^{(1)}$ von T gegenüber $\big(O(2)\otimes O(2)\big)^*$ invariant ist. Wegen (5) gilt dasselbe auch für das orthogonale Komplement $T^{(2)}$ von $T^{(1)}$ bezüglich T, welches etwa durch die Gleichungen $x_{13}+x_{24}=0$, $x_{23}-x_{14}=0$ bestimmt ist und ebenfalls einen zweidimensionalen Untervektorraum von T darstellt.

Wir zeigen nun, daß $T^{(1)}$ und $T^{(2)}$ bezüglich der in $\big(O(2)\otimes O(2)\big)^*$ enthaltenen Untergruppe $SO(2)\otimes SO(2)$ irreduzibel sind; dasselbe gilt dann um so mehr auch bezüglich $\big(O(2)\otimes O(2)\big)^*$ selbst (vgl. Definition 2!). Dies geschehe indirekt; man nimmt zunächst an, $T^{(1)}$ sei bezüglich $SO(2)\otimes SO(2)$ reduzibel. Da $SO(2)\otimes SO(2)$ wegen (5) eine orthogonale Gruppe ist, kann jetzt $T^{(1)}$ als direkte Summe von zwei orthogonalen, eindimensionalen, bezüglich $SO(2)\otimes SO(2)$ invarianten und irreduziblen Untervektorräumen $R^{(1)}$ und $S^{(1)}$ dargestellt werden:

$$(13)\qquad T^{(1)}=R^{(1)}\dotplus S^{(1)}.$$

Ist nun $\mathfrak{r}^{(1)}\neq 0$ ein Vektor aus $R^{(1)}$, so gilt für jedes beliebige Element $A\in SO(2)\otimes SO(2)$: $A(\mathfrak{r}^{(1)})=c(A)\,\mathfrak{r}^{(1)}$, wobei $c(A)$ eine von A stetig abhängende reelle Zahl ist, die wegen $A\in O(4)$ nur die Werte $+1$ und -1 annehmen kann. Da aber $SO(2)\otimes SO(2)$ (bezüglich der natürlichen Topologie) zusammenhängend ist und die identische Transformation enthält, muß $c(A)=+1$

[14]) Es ist bemerkenswert, daß ein beliebiges Element von $SO(2)\otimes SO(2)$ sich auch durch die Quaternionengleichung $x'=(\cos\varphi e-\sin\varphi i)\,x\,(\cos\psi e-\sin\psi j)$ mit $x=x_{13}e+x_{23}i+x_{14}j+x_{24}k$ und $x'=x'_{13}e+x'_{23}i+x'_{14}j+x'_{24}k$ darstellen läßt.

gelten, und wir haben für alle $A \in SO(2) \otimes SO(2)$ die Beziehung:

$$A(\mathfrak{r}^{(1)}) = \mathfrak{r}^{(1)}. \tag{14}$$

Ebenso sieht man ein, daß für alle $A \in SO(2) \otimes SO(2)$ und für einen Vektor $\mathfrak{f}^{(1)} \neq 0$ aus $S^{(1)}$ die Beziehung:

$$A(\mathfrak{f}^{(1)}) = \mathfrak{f}^{(1)} \tag{15}$$

bestehen muß. (14) und (15) ergibt wegen (13) zusammen die Invarianz jedes Vektors von $T^{(1)}$ gegenüber allen Transformationen aus $SO(2) \otimes SO(2)$. Daraus würde insbesondere folgen, daß der Vektor $(1, 0, 0, 1) \in T^{(1)}$ bei $SO(2) \otimes SO(2)$ stets invariant bleibt, während er nach (12) (mit $\varepsilon = +1$!) in den für $\varphi \neq \psi$ von $(1, 0, 0, 1)$ verschiedenen Vektor $\big(\cos(\varphi - \psi), -\sin(\varphi - \psi), \sin(\varphi - \psi), \cos(\varphi - \psi)\big)$ übergeführt wird. Dieser Widerspruch zeigt, daß $T^{(1)}$ in der Tat bezüglich $SO(2) \otimes SO(2)$ irreduzibel ist. Auf analoge Weise findet man, daß $T^{(2)}$ entweder auch bezüglich $SO(2) \otimes SO(2)$ irreduzibel ist oder bei allen Transformationen von $SO(2) \otimes SO(2)$ elementweise festbleibt. Der letztere Fall kann wiederum nicht eintreten, da der Vektor $(1, 0, 0, -1) \in T^{(2)}$ bei der Transformation mit der Matrix (11) und $\varepsilon = +1$ in den für $\varphi + \psi \neq 0$ und $\varphi + \psi \neq 2\pi$ davon verschiedenen Vektor $\big(\cos(\varphi + \psi), -\sin(\varphi + \psi), -\sin(\varphi + \psi), -\cos(\varphi + \psi)\big)$ übergeht.

Damit haben wir T als direkte Summe der orthogonalen und bezüglich $\big(O(2) \otimes O(2)\big)^*$ (wie auch bezüglich $SO(2) \otimes SO(2)\big)$ invarianten und irreduziblen Untervektorräume $T^{(1)}$ und $T^{(2)}$ dargestellt:

$$T = T^{(1)} \dotplus T^{(2)}, \tag{16}$$

und es bleibt nun noch die Satz 1′ behauptete Eindeutigkeit einer derartigen Darstellung nachzuweisen. Hierzu kann man wegen $\operatorname{Dim} T^{(1)} = \operatorname{Dim} T^{(2)}$ leider nicht den Hilfssatz 3 anwenden, sondern muß anders vorgehen. Dies geschieht, indem man zunächst untersucht, wie sich die Vektorräume $T^{(1)}$ und $T^{(2)}$ verhalten, wenn man sich auf diejenige Untergruppe $[SO(2)]^2$ von $SO(2) \otimes SO(2)$ beschränkt, welche aus den „Tensorquadraten" aller Transformationen aus $SO(2)$ besteht und deshalb durch die Matrizen (11) mit $\varepsilon = +1$ und $\varphi = \psi$ gegeben ist. Wir ersehen jetzt aus (12), daß jeder Vektor von T der Form $(a, b, -b, a)$, d.h. jeder Vektor aus $T^{(1)}$ bei allen Transformationen aus $[SO(2)]^2$ invariant bleibt. Dies bedeutet, anders ausgedrückt:

$$T^{(1)} = U^{(1)} \dotplus U^{(2)}, \tag{17}$$

wobei $U^{(1)}$ und $U^{(2)}$ zwei eindimensionale, bezüglich $[SO(2)]^2$ invariante (und irreduzible) Untervektorräume von $T^{(1)}$ sind. $T^{(2)}$ bleibt dagegen bezüglich $[SO(2)]^2$ irreduzibel, denn sonst müßte wegen des Zusammenhängendseins von $[SO(2)]^2$, wie die schon für $SO(2) \otimes SO(2)$ durchgeführte Überlegung zeigt, jeder Vektor aus $T^{(2)}$ gegenüber allen Transformationen aus $[SO(2)]^2$ invariant bleiben. Dies würde aber wegen der elementweisen Invarianz von $T^{(1)}$ gegen $[SO(2)]^2$ sogar die elementweise Invarianz von ganz T gegen

$[SO(2)]^2$ nach sich ziehen, offensichtlich eine Unmöglichkeit. Aus (16) und (17) resultiert also die Darstellung:

$$T = U^{(1)} \dotplus U^{(2)} \dotplus T^{(2)} \tag{18}$$

von T als direkte Summe von bezüglich $[SO(2)]^2$ invarianten, irreduziblen Untervektorräumen; und $T^{(1)}$ ist dabei genau der Untervektorraum aller derjenigen Vektoren von T, die sich bei allen Transformationen von $[SO(2)]^2$ nicht ändern.

Existierte nun außer (16) noch eine andere „Zerlegung" von T in eine direkte Summe von orthogonalen, bezüglich $(O(2)\otimes O(2))^*$ invarianten, irreduziblen Untervektorräumen, so können hierbei auf Grund von Hilfssatz 2 nur zwei zweidimensionale Summanden auftreten: $T = T'^{(1)} \dotplus T'^{(2)}$. Beschränkt man sich daraufhin auf $[SO(2)]^2$, so muß sich nach (18) und Hilfssatz 2 einer dieser beiden Summanden, etwa $T'^{(1)}$, weiter in eine direkte Summe zweier eindimensionaler, gegenüber $[SO(2)]^2$ invarianter Untervektorräume zerlegen lassen. Dann folgt aus dem Zusammenhängendsein von $[SO(2)]^2$ wieder die elementweise Invarianz von $T'^{(1)}$ gegenüber $[SO(2)]^2$, d.h. wegen der vorhin erwähnten Eigenschaft von $T^{(1)}$ in Verbindung mit $\mathrm{Dim}\, T'^{(1)} = \mathrm{Dim}\, T^{(1)}$ gilt: $T'^{(1)} = T^{(1)}$. Weil $T'^{(2)}$ bzw. $T^{(2)}$ die orthogonalen Komplemente von $T'^{(1)}$ bzw. $T^{(1)}$ in bezug auf T sind, ergibt sich aus $T'^{(1)} = T^{(1)}$ schließlich auch $T'^{(2)} = T^{(2)}$; und mit der gezeigten Eindeutigkeit der Darstellung (16) ist Satz 1′ für den Fall $l = m = 2$ vollständig bewiesen.

Wir bemerken noch, daß man ganz analog auch die Eindeutigkeit der Darstellung (16) *bezüglich der Gruppe* $SO(2)\otimes SO(2)$ *einsieht.* Dies zieht eine wichtige Konsequenz nach sich; wir behaupten: T *ist sowohl bezüglich* $SO(2)\otimes O(2)$ *als auch bezüglich* $O(2)\otimes SO(2)$ *irreduzibel.* Wäre nämlich etwa T bezüglich $SO(2)\otimes O(2)$ reduzibel, so müßte T wegen $SO(2)\otimes O(2) \supseteq SO(2)\otimes SO(2)$ und dem Ebengesagten direkte Summe der gegen $SO(2)\otimes O(2)$ invarianten Untervektorräume $T^{(1)}$ und $T^{(2)}$ sein. Die Transformation aus $SO(2)\otimes O(2)$ mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

führt jedoch den Vektor $(1, 0, 0, 1) \in T^{(1)}$ in den Vektor $(0, 1, 1, 0) \notin T^{(1)}$ über, und dieser Widerspruch beweist die Irreduzibilität von T bezüglich $SO(2)\otimes O(2)$. Analog zeigt man auch die Irreduzibilität von T bezüglich $O(2)\otimes SO(2)$.

b) Fall $l \neq 2$ oder $m \neq 2$.

Wir beweisen nun die Irreduzibilität von T bezüglich $SO(l)\otimes SO(m)$, falls nicht $l = m = 2$; dann gilt dasselbe um so mehr auch bezüglich der Gruppe $(O(l)\otimes O(m))^*$, wie in Satz 1′ behauptet wurde. Dieser Nachweis geschieht durch vollständige Induktion nach $l + m = n$. Für $2 \leqq n \leqq 4$ ist die Behauptung trivial, da dann $l = 1$ oder $m = 1$ gilt ($l = m = 2$ war ja ausgeschlossen!) und

somit $SO(l)\otimes SO(m)$ mit den Gruppen $SO(m)$ oder $SO(l)$ isomorph ist, bezüglich derer T gewiß irreduzibel ist. Wir nehmen jetzt also an, unsere Behauptung sei für $n-1$ $(n\geqq 5)$ bewiesen, und werden daraus ihre Gültigkeit für n folgern.

Dazu betrachten wir zunächst den Fall $l\leqq m$ (d.h. $m\geqq 3$). $SO(l)\otimes SO(m)$ enthält die Gruppe $SO(l)\otimes(O(1)\dotplus O(m-1))^*$, wobei $(O(1)\dotplus O(m-1))^*$ diejenige Untergruppe von $SO(m)$ bedeuten soll, deren Elemente durch Matrizen der Form $(\varepsilon)\dotplus\mathfrak{D}$[15]) ($\mathfrak{D}=$ beliebige $(m-1)$-reihige orthogonale Matrix, $\varepsilon=$ Wert der Determinante von $\mathfrak{D}$) gegeben sind. Auf Grund von (9) stellt man leicht fest, daß der lm-dimensionale Tangentialraum T von $G_{l,m}$ direkte Summe der gegen $SO(l)\otimes(O(1)\dotplus O(m-1))^*$ invarianten l-dimensionalen und $l(m-1)$-dimensionalen Untervektorräume $R^{(1)}$: $x_{i\alpha'}=0$ $(i=1,\ldots,l;\ \alpha'=l+2,\ldots,n)$ und $S^{(1)}$: $x_{il+1}=0$ $(i=1,\ldots,l)$ ist. $R^{(1)}$ und $S^{(1)}$ sind sogar bezüglich $SO(l)\otimes(O(1)\dotplus O(m-1))^*$ irreduzibel, weil $R^{(1)}$ bezüglich $SO(l)\otimes O(1)$ und $S^{(1)}$ bezüglich $SO(l)\otimes O(m-1)$ irreduzibel ist. Das erstere ist trivial und das letztere folgt wegen $SO(l)\otimes O(m-1)\supseteqq SO(l)\otimes SO(m-1)$ aus der Induktionsvoraussetzung bzw. im Fall $l=2$, $m=3$ aus der auf S. 345 festgestellten Irreduzibilität von $S^{(1)}$ bezüglich $SO(2)\otimes O(2)$. Wäre nun T bezüglich $SO(l)\otimes SO(m)$ reduzibel, so auch bezüglich $SO(l)\otimes(O(1)\dotplus O(m-1))^*$, und T müßte auf Grund von Hilfssatz 2 direkte Summe eines l-dimensionalen und eines $l(m-1)$-dimensionalen, sowohl bezüglich $SO(l)\otimes SO(m)$ als auch bezüglich $SO(l)\otimes(O(1)\dotplus O(m-1))^*$ invarianten und irreduziblen Untervektorraums sein. Wegen $m>2$, d.h. $l(m-1)>l$ stimmten dann nach Hilfssatz 3 ($\mathfrak{G}=SO(l)\otimes(O(1)\dotplus O(m-1))^*$!) diese beiden Vektorräume mit den angegebenen Räumen $R^{(1)}$ und $S^{(1)}$ überein, so daß die einzig mögliche Zerlegung von T in bezüglich $SO(l)\otimes SO(m)$ invariante, irreduzible Untervektorräume lautet:

$$T=R^{(1)}\dotplus S^{(1)}. \tag{19}$$

Andererseits enthält $SO(l)\otimes SO(m)$ aber auch die Gruppe $SO(l)\otimes(O(m-1)\dotplus O(1))^*$, wobei jetzt $(O(m-1)\dotplus O(1))^*$ die Gruppe aller Transformationen mit Matrizen der Form $\mathfrak{D}\dotplus(\varepsilon)$ ($\mathfrak{D}=(m-1)$-reihige orthogonale Matrix, $\varepsilon=$ Wert der Determinante von $\mathfrak{D}$) darstellt. Man findet genau wie im letzten Abschnitt unter Benutzung von Hilfssatz 2, Hilfssatz 3 und (9)

$$T=R^{(2)}\dotplus S^{(2)} \tag{20}$$

als die einzig mögliche Zerlegung von T in bezüglich $SO(l)\otimes SO(m)$ invariante, irreduzible Untervektorräume; hierbei ist aber $R^{(2)}$ durch $x_{i\alpha''}=0$ $(i=1,\ldots,l;\ \alpha''=l+1,\ldots,n-1)$ und $S^{(2)}$ durch $x_{in}=0$ $(i=1,\ldots,l)$ definiert. Nun sind die Zerlegungen (19) und (20) wegen $m>2$, d.h. $n>l+1$ gewiß verschieden; und somit kann T bezüglich $SO(l)\otimes SO(m)$ $(l\leqq m)$ nicht reduzibel sein. Dasselbe trifft auch im Falle $l\geqq m$ zu, wie man durch Einschränkung von $SO(l)\otimes SO(m)$ auf die (entsprechend definierten) Untergruppen

[15]) Vgl. Fußnote 11.

$(O(1)\dotplus O(l-1))^*\otimes SO(m)$ bzw. $(O(l-1)\dotplus O(1))^*\otimes SO(m)$ unter Benutzung der Hilfssätze 2, 3 und 4 (10) sowie der Irreduzibilität des Tangentialraums bezüglich $O(2)\otimes SO(2)$ einsieht. Also gilt die Induktionsbehauptung (Irreduzibilität von T bezüglich $SO(l)\otimes SO(m)$, wenn nicht $l=m=2$) in jedem Fall, und unser Induktionsbeweis wie der Beweis von Satz 1′ ist zu Ende geführt. q.e.d.

Beweise von Satz 2′ und Satz 3′.

Der Tangentialraum T ist bezüglich $O(l)\otimes O(m)$ stets irreduzibel; dies folgt im Spezialfall $l=m=2$ aus der beim Beweis von Satz 1′ festgestellten Irreduzibilität von T bezüglich $SO(2)\otimes O(2)$ und im allgemeinen Falle aus der ebenfalls gezeigten Irreduzibilität von T bezüglich $SO(l)\otimes SO(m)$. Damit ist Satz 2′ schon bewiesen, und wir wenden uns dem Beweis von Satz 3′ zu. Dieser Satz sagt im einzelnen aus: Für $l=m=2$ besitzt T bezüglich $SO(2)\otimes SO(2)$ die einzig mögliche Zerlegung $T=T^{(1)}\dotplus T^{(2)}$[16]), sonst ist T bezüglich $SO(l)\otimes SO(m)$ irreduzibel, während T bezüglich $SO(l)\otimes O(m)$ für beliebige l und m irreduzibel ist. Die ersten beiden Aussagen hiervon wurden beim Beweis von Satz 1′ schon gezeigt, und die letzte Aussage ergibt sich wiederum aus der bewiesenen Irreduzibilität von T bezüglich $SO(2)\otimes O(2)$ bzw. bezüglich $SO(l)\otimes SO(m)$ ($l\neq 2$ oder $m\neq 2$).

Hiermit sind die Sätze 1′, 2′ und 3′ und somit auch die Sätze 1, 2 und 3 vollständig bewiesen; wir bemerken noch, daß in unseren Beweisen von der Theorie der Lieschen Gruppen kein Gebrauch gemacht wurde.

3. Krümmungseigenschaften der mit invarianten Riemannschen Metriken versehenen Grassmannschen Mannigfaltigkeiten

3.1. Zunächst sollen in diesem Abschnitt der Riemannsche Krümmungstensor der Metrik (6) von $G_{l,m}$ explizit berechnet und daraus einige Folgerungen für die Krümmungseigenschaften von $G_{l,m}$ gezogen werden. Wegen der Invarianz der betrachteten Riemannschen Metrik gegenüber der auf $G_{l,m}$ transitiv wirkenden Gruppe $O(n)$ genügt es hierbei, sich auf einen speziellen Punkt $o\in G_{l,m}$ zu beschränken. Wir nehmen nun an, $u_{i\alpha}$ ($i=1,\ldots,l$; $\alpha=l+1,\ldots,n$) seien die durch das orthonormierte n-Bein $\{\mathring{e}_j,\mathring{e}_\beta\}$ bestimmten, lokalen Koordinaten von $G_{l,m}$ in einer Umgebung $\mathfrak{U}$ von $o=(0,\ldots,0)$ und jeder Punkt p dieser Umgebung mit den Koordinaten $u_{i\alpha}$ werde durch das orthonormierte l-Bein $\{e_j(u_{i\alpha})\}$ ($j=1,\ldots,l$; $\beta=l+1,\ldots,n$) dargestellt (vgl. Abschnitt 1!). Da man sich die Vektoren e_j durch Orthogonalisierung aus den in (1) definierten Vektoren f_i entstanden denken kann, darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, die Vektorfunktionen $e_j=e_j(u_{i\alpha})$ seien beliebig oft stetig differenzierbar, es soll außerdem $e_j(0,\ldots,0)=\mathring{e}_j$ gelten. Ebenfalls kann man annehmen, das l-Bein $\{e_j(u_{i\alpha})\}$ werde durch das orthonormierte m-Bein $\{e_\beta(u_{i\alpha})\}$ ($\beta=l+1,\ldots,n$) zu einem orthonormierten n-Bein ergänzt, dessen Vektoren $e_\beta(u_{i\alpha})$ auch beliebig oft stetig differenzierbar von den Koordinaten $u_{i\alpha}$ abhängen und für die $e_\beta(0,\ldots,0)=\mathring{e}_\beta$ ist. Dann lautet das Linienelement-

[16]) $T^{(1)}$ und $T^{(2)}$ haben hier dieselbe Bedeutung wie in (16).

quadrat der Metrik (6) von $G_{l,m}$:

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{l} \sum_{\alpha,\beta=l+1}^{n} g_{(i\alpha)(j\beta)}(u_{k\gamma})\, du_{i\alpha}\, du_{j\beta} \tag{21}$$

mit

$$g_{(i\alpha)(j\beta)} = \sum_{k=1}^{l} \sum_{\gamma=l+1}^{n} \left\langle \mathfrak{e}_\gamma \frac{\partial \mathfrak{e}_k}{\partial u_{i\alpha}} \right\rangle \left\langle \mathfrak{e}_\gamma \frac{\partial \mathfrak{e}_k}{\partial u_{j\beta}} \right\rangle^{17}). \tag{22}$$

Zur Berechnung des Krümmungstensors dieser Metrik erweist sich nun der Cartansche Differentialformenkalkül als besonders geeignet. Definiert man nämlich auf $\mathfrak{U}$ die Pfaffschen Formen $\omega_{(i\alpha)}$ mit Hilfe der Vektordifferentialformen

$$d\mathfrak{e}_i = \sum_{j=1}^{l} \sum_{\beta=l+1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{e}_i}{\partial u_{j\beta}}\, du_{j\beta}, \qquad d\mathfrak{e}_\alpha = \sum_{j=1}^{l} \sum_{\beta=l+1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{e}_\alpha}{\partial u_{j\beta}}\, du_{j\beta}$$

durch

$$\begin{cases} \omega_{(i\alpha)} = \langle \mathfrak{e}_\alpha\, d\mathfrak{e}_i \rangle = \sum_{j=1}^{l} \sum_{\beta=l+1}^{n} \left\langle \mathfrak{e}_\alpha \frac{\partial \mathfrak{e}_i}{\partial u_{j\beta}} \right\rangle du_{j\beta} = -\langle \mathfrak{e}_i\, d\mathfrak{e}_\alpha \rangle = -\omega_{(\alpha i)}, \\ (i = 1, \ldots, l;\ \alpha = l+1, \ldots, n), \end{cases} \tag{23}$$

so folgt aus (21) und (22):

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{l} \sum_{\alpha=l+1}^{n} (\omega_{(i\alpha)})^2 \qquad \text{(vgl. (6)!)}.$$

Nach CHERN[18]) existieren jetzt auf $\mathfrak{U}$ stets Pfaffsche Formen $\omega_{(i\alpha)(j\beta)}$ $(i, j = 1, \ldots, l;\ \alpha, \beta = l+1, \ldots, n)$ mit den sie eindeutig bestimmenden Eigenschaften:

$$\omega_{(i\alpha)(j\beta)} = -\omega_{(j\beta)(i\alpha)} \tag{24}$$

und

$$d\omega_{(i\alpha)} = -\sum_{j=1}^{l} \sum_{\beta=l+1}^{n} \omega_{(i\alpha)(j\beta)} \wedge \omega_{(j\beta)}, \tag{25}$$

und die sich aus der Darstellung

$$d\omega_{(i\alpha)(j\beta)} + \sum_{k=1}^{l} \sum_{\gamma=l+1}^{n} \omega_{(i\alpha)(k\gamma)} \wedge \omega_{(k\gamma)(j\beta)} = \frac{1}{2} \sum_{k,h=1}^{l} \sum_{\gamma,\delta=l+1}^{n} Q_{(i\alpha)(j\beta)(k\gamma)(h\delta)} (\omega_{(k\gamma)} \wedge \omega_{(h\delta)}) \tag{26}$$

mit

$$Q_{(i\alpha)(j\beta)(k\gamma)(h\delta)} = -Q_{(i\alpha)(j\beta)(h\delta)(k\gamma)}$$

eindeutig ergebenden Koeffizienten $Q_{(i\alpha)(j\beta)(k\gamma)(h\delta)}$ stimmen im Punkt o wegen

$$\omega_{(i\alpha)}(0, \ldots, 0) = du_{i\alpha} \tag{27}$$

mit den entsprechenden Komponenten $R_{(i\alpha)(j\beta)(k\gamma)(h\delta)}$ des Riemannschen Krümmungstensors unserer Metrik überein $(i, j, k, h = 1, \ldots, l;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta = l+1, \ldots, n)$.

Diese Tatsachen lassen in unserem Fall die explizite Berechnung von $R_{(i\alpha)(j\beta)(k\gamma)(h\delta)}(0, \ldots, 0)$ folgendermaßen vonstatten gehen: Die Differentiation von (23) ergibt:

$$d\omega_{(i\alpha)} = \sum_{j,k=1}^{l} \sum_{\beta,\gamma=l+1}^{n} \left\langle \frac{\partial \mathfrak{e}_\alpha}{\partial u_{k\gamma}} \frac{\partial \mathfrak{e}_i}{\partial u_{j\beta}} \right\rangle du_{k\gamma} \wedge du_{j\beta} = \langle d\mathfrak{e}_\alpha \wedge d\mathfrak{e}_i \rangle,$$

[17]) Die Metrik (21) hängt nicht von der speziellen Wahl der durch die Punkte p von $G_{l,m}$ noch nicht vollständig bestimmten Vektorfunktionen $\mathfrak{e}_j$ und $\mathfrak{e}_\beta$ ab, da sie gegenüber $O(n)$ invariant ist.

[18]) Siehe [5], S. 34–38.

woraus durch Einsetzen von

$$(28)\qquad de_i = \sum_{j=1}^{l} \langle e_j\, de_i\rangle\, e_j + \sum_{\beta=l+1}^{n} \langle e_\beta\, de_i\rangle\, e_\beta \qquad (i = 1, \ldots, l)$$

und

$$(29)\qquad de_\alpha = \sum_{j=1}^{l} \langle e_j\, de_\alpha\rangle\, e_j + \sum_{\beta=l+1}^{n} \langle e_\beta\, de_\alpha\rangle\, e_\beta \qquad (\alpha = l+1, \ldots, n)^{19})$$

mit den zu (23) hinzukommenden Abkürzungen

$$(30)\qquad \omega_{(ij)} = \langle e_j\, de_i\rangle = -\langle e_i\, de_j\rangle = -\omega_{(ji)}$$

und

$$(31)\qquad \omega_{(\alpha\beta)} = \langle e_\beta\, de_\alpha\rangle = -\langle e_\alpha\, de_\beta\rangle = -\omega_{(\beta\alpha)}:$$

$$d\omega_{(i\alpha)} = \sum_{j=1}^{l} \omega_{(\alpha j)} \wedge \omega_{(ij)} + \sum_{\beta=l+1}^{n} \omega_{(\alpha\beta)} \wedge \omega_{(i\beta)} = \sum_{j=1}^{l} \sum_{\beta=l+1}^{n} (\omega_{(ij)}\, \delta_{\alpha\beta} + \delta_{ij}\, \omega_{(\alpha\beta)}) \wedge \omega_{(j\beta)}$$

folgt. Durch Vergleich von der letzten Beziehung und von

$$\omega_{(ji)}\, \delta_{\beta\alpha} + \delta_{ji}\, \omega_{(\beta\alpha)} = -(\omega_{(ij)}\, \delta_{\alpha\beta} + \delta_{ij}\, \omega_{(\alpha\beta)})$$

mit (25) und (24) schließt man auf:

$$\omega_{(i\alpha)(j\beta)} = -(\omega_{(ij)}\, \delta_{\alpha\beta} + \delta_{ij}\, \omega_{(\alpha\beta)}).$$

Damit wird nach (30), (31), (28), (29), (23):

$$\begin{aligned}
d\omega_{(i\alpha)(j\beta)} &+ \sum_{k=1}^{l} \sum_{\gamma=l+1}^{n} \omega_{(i\alpha)(k\gamma)} \wedge \omega_{(k\gamma)(j\beta)} = \langle de_i \wedge de_j\rangle\, \delta_{\alpha\beta} + \delta_{ij} \langle de_\alpha \wedge de_\beta\rangle + \\
&+ \sum_{k=1}^{l} \sum_{\gamma=l+1}^{n} (\omega_{(ik)}\, \delta_{\alpha\gamma} + \delta_{ik}\, \omega_{(\alpha\gamma)}) \wedge (\omega_{(kj)}\, \delta_{\gamma\beta} + \delta_{kj}\, \omega_{(\gamma\beta)}) \\
&= \Big(\sum_{k=1}^{l} \omega_{(ik)} \wedge \omega_{(jk)} + \sum_{\gamma=l+1}^{n} \omega_{(i\gamma)} \wedge \omega_{(j\gamma)} \Big)\, \delta_{\alpha\beta} + \delta_{ij} \Big(\sum_{k=1}^{l} \omega_{(\alpha k)} \wedge \omega_{(\beta k)} + \sum_{\gamma=l+1}^{n} \omega_{(\alpha\gamma)} \wedge \omega_{(\beta\gamma)} \Big) + \\
&- \Big(\sum_{k=1}^{l} \omega_{(ik)} \wedge \omega_{(kj)} \Big)\, \delta_{\alpha\beta} + \delta_{ij} \Big(\sum_{\gamma=l+1}^{n} \omega_{(\alpha\gamma)} \wedge \omega_{(\gamma\beta)} \Big) + \omega_{(ij)} \wedge \omega_{(\alpha\beta)} + \omega_{(\alpha\beta)} \wedge \omega_{(ij)} \\
&= \Big(\sum_{\gamma=l+1}^{n} \omega_{(i\gamma)} \wedge \omega_{(j\gamma)} \Big)\, \delta_{\alpha\beta} + \delta_{ij} \Big(\sum_{k=1}^{l} \omega_{(k\alpha)} \wedge \omega_{(k\beta)} \Big) \\
&= \sum_{k,h=1}^{l} \sum_{\gamma,\delta=l+1}^{n} (\delta_{ik}\, \delta_{jh}\, \delta_{\gamma\delta}\, \delta_{\alpha\beta} + \delta_{ij}\, \delta_{kh}\, \delta_{\alpha\gamma}\, \delta_{\beta\delta})\, (\omega_{(k\gamma)} \wedge \omega_{(h\delta)}) \\
&= \tfrac{1}{2} \sum_{k,h=1}^{l} \sum_{\gamma,\delta=l+1}^{n} \big((\delta_{ik}\, \delta_{jh} - \delta_{ih}\, \delta_{jk})\, \delta_{\alpha\beta}\, \delta_{\gamma\delta} + \delta_{ij}\, \delta_{kh} (\delta_{\alpha\gamma}\, \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\, \delta_{\beta\gamma}) \big)\, (\omega_{(k\gamma)} \wedge \omega_{(h\delta)}) \\
&\qquad (1 \leqq i, j \leqq l;\ l+1 \leqq \alpha, \beta \leqq n).
\end{aligned}$$

Vergleicht man dieses Resultat mit der allgemeinen Formel (26) und berücksichtigt man dabei die schiefe Symmetrie des eben berechneten Koeffizienten von $\omega_{(k\gamma)} \wedge \omega_{(h\delta)}$ bezüglich der Indexpaare $(k\gamma)$ und $(h\delta)$, so erhält man schließlich für die Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors der Metrik (21):

$$(32)\quad R_{(i\alpha)(j\beta)(k\gamma)(h\delta)}(0, \ldots, 0) = (\delta_{ik}\, \delta_{jh} - \delta_{ih}\, \delta_{jk})\, \delta_{\alpha\beta}\, \delta_{\gamma\delta} + \delta_{ij}\, \delta_{kh} (\delta_{\alpha\gamma}\, \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\, \delta_{\beta\gamma}).$$

[19]) Hierbei sind die Differentialformen $\langle e_j\, de_i\rangle$ und $\langle e_\beta\, de_\alpha\rangle$ analog wie die Differentialformen von (23) definiert.

Daraus berechnet sich jetzt im Fall $l\,m>1$ mit der aus (22), (23) und (27) folgenden Beziehung

$$g_{(i\alpha)(j\beta)}(0,\ldots,0)=\delta_{ij}\,\delta_{\alpha\beta} \tag{33}$$

für die Riemannsche Krümmung $K(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ von (21), welche zu dem von den linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{x}=(x_{i\alpha})$ und $\mathfrak{y}=(y_{i\alpha})$ aus dem Tangentialraum T von $G_{l,m}$ im Nullpunkt aufgespannten Flächenelement gehört[20]):

$$K(\mathfrak{x},\mathfrak{y})=\frac{\sum\limits_{i,j,k,h=1}^{l}\ \sum\limits_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=l+1}^{n} R_{(i\alpha)(j\beta)(k\gamma)(h\delta)}(0,\ldots,0)\,x_{i\alpha}\,y_{j\beta}\,x_{k\gamma}\,y_{h\delta}}{\sum\limits_{i,j,k,h=1}^{l}\ \sum\limits_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=l+1}^{n}\left(g_{(i\alpha)(k\gamma)}\,g_{(j\beta)(h\delta)}-g_{(i\alpha)(h\delta)}\,g_{(j\beta)(k\gamma)}\right)(0,\ldots,0)\,x_{i\alpha}\,y_{j\beta}\,x_{k\gamma}\,y_{h\delta}}$$

$$=\frac{\sum\limits_{\alpha,\gamma=l+1}^{n}\ \sum\limits_{i,j=1}^{l}(x_{i\alpha}\,y_{j\alpha}\,x_{i\gamma}\,y_{j\gamma}-x_{i\alpha}\,y_{j\alpha}\,x_{j\gamma}\,y_{i\gamma})+\sum\limits_{i,k=1}^{l}\ \sum\limits_{\alpha,\beta=l+1}^{n}(x_{i\alpha}\,y_{i\beta}\,x_{k\alpha}\,y_{k\beta}-x_{i\alpha}\,y_{i\beta}\,x_{k\beta}\,y_{k\alpha})}{\sum\limits_{i,j=1}^{l}\ \sum\limits_{\alpha,\beta=l+1}^{n}((x_{i\alpha})^2\,(y_{j\beta})^2-x_{i\alpha}\,y_{i\alpha}\,x_{j\beta}\,y_{j\beta})}$$

$$=\frac{\sum\limits_{\substack{\alpha,\gamma\\=l+1}}^{n}\left(\sum\limits_{i,j=1}^{l}(x_{i\alpha}\,y_{j\alpha}-x_{j\alpha}\,y_{i\alpha})\,(x_{i\gamma}\,y_{j\gamma}-x_{j\gamma}\,y_{i\gamma})\right)+\sum\limits_{i,k=1}^{l}\left(\sum\limits_{\substack{\alpha,\beta\\=l+1}}^{n}(x_{i\alpha}\,y_{i\beta}-x_{i\beta}\,y_{i\alpha})(x_{k\alpha}\,y_{k\beta}-x_{k\beta}\,y_{k\alpha})\right)}{\sum\limits_{i,j=1}^{l}\ \sum\limits_{\alpha,\beta=l+1}^{n}((x_{i\alpha})^2\,(y_{j\beta})^2+(x_{j\beta})^2\,(y_{i\alpha})^2-2\,x_{i\alpha}\,y_{j\beta}\,x_{j\beta}\,y_{i\alpha})}$$

$$=\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{l}\left(\sum\limits_{\alpha=l+1}^{n}(x_{i\alpha}\,y_{j\alpha}-x_{j\alpha}\,y_{i\alpha})\right)^2+\sum\limits_{\alpha,\beta=l+1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{l}(x_{i\alpha}\,y_{i\beta}-x_{i\beta}\,y_{i\alpha})\right)^2}{\sum\limits_{i,j=1}^{l}\ \sum\limits_{\alpha,\beta=l+1}^{n}(x_{i\alpha}\,y_{j\beta}-x_{j\beta}\,y_{i\alpha})^2}.$$

$K(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ ist also stets nichtnegativ; und im Fall $l=1$, $m>1$ oder $m=1$, $l>1$ sogar vom konstanten Wert 1. In den übrigen Fällen $l>1$ und $m>1$ ist die Riemannsche Krümmung dagegen nicht konstant. Definiert man nämlich $\mathfrak{x}^{(1)}$ und $\mathfrak{y}^{(1)}$ durch $\mathfrak{x}^{(1)}=\{x^{(1)}_{i\alpha}\}$ mit $x^{(1)}_{i\alpha}=\delta_{i1}\,\delta_{\alpha\,l+1}$ und $\mathfrak{y}^{(1)}=\{y^{(1)}_{i\alpha}\}$ mit $y^{(1)}_{i\alpha}=\delta_{i1}\,\delta_{\alpha\,l+2}$ $(i=1,\ldots,l;\ \alpha=l+1,\ldots,n)$, so wird $K(\mathfrak{x}^{(1)},\mathfrak{y}^{(1)})=1$, während für $\mathfrak{x}^{(2)}=\{\delta_{i1}\,\delta_{\alpha\,l+1}\}$ und $\mathfrak{y}^{(2)}=\{\delta_{i2}\,\delta_{\alpha\,l+2}\}$ $K(\mathfrak{x}^{(2)},\mathfrak{y}^{(2)})=0$ gilt. Daraus folgt gleichzeitig, daß die Riemannsche Krümmung der Metrik (21) nur dann überall positiv sein kann, wenn sie konstant ist.

Der Ricci-Tensor $R_{(j\beta)(k\gamma)}=g^{(i\alpha)(h\delta)}\,R_{(i\alpha)(j\beta)(k\gamma)(h\delta)}$ unserer Metrik hat nach (32) und (33) im Nullpunkt die Komponenten:

$$\left\{\begin{aligned}R_{(j\beta)(k\gamma)}(0,\ldots,0)&=\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{\alpha=l+1}^{n}R_{(i\alpha)(j\beta)(k\gamma)(i\alpha)}(0,\ldots,0)=(\delta_{jk}-l\,\delta_{jk})\,\delta_{\beta\gamma}+\\&+\delta_{jk}(\delta_{\beta\gamma}-m\,\delta_{\beta\gamma})=(2-n)\,\delta_{jk}\,\delta_{\beta\gamma}=(2-n)\,g_{(j\beta)(k\gamma)}(0,\ldots,0),\end{aligned}\right. \tag{34}$$

er erweist sich also als zum Maßtensor proportional. Die Grassmannsche Mannigfaltigkeit $G_{l,m}$ stellt deshalb bezüglich der Riemannschen Metrik (21)

[20]) Vgl. [6], S. 81.

einen sog. „Einsteinschen Raum" dar[21]) und besitzt wegen (34) die konstante Skalarkrümmung

$$R = g^{(j\beta)(k\gamma)} R_{(j\beta)(k\gamma)} = g^{(j\beta)(k\gamma)} (2-n)\, g_{(j\beta)(k\gamma)} = \big(2-(l+m)\big)\, l\, m.$$

Berücksichtigt man nun noch den konstanten Maßfaktor der nach Satz 2 durch Invarianz gegenüber $O(n)$ ausgezeichneten Riemannschen Metrik von $G_{l,m}$, so kann man die bisherigen Ergebnisse dieses Abschnitts zusammenfassen in

Satz 4. *Die auf der Grassmannschen Mannigfaltigkeit* $G_{l,m}$[22]) *definierte Riemannsche Metrik* $ds^2 = \lambda\Big(\sum_{i=1}^{l}\sum_{\alpha=l+1}^{n}\big(\langle e_\alpha\, de_i\rangle\big)^2\Big)$ $(\lambda = \text{const} > 0)$ *macht* $G_{l,m}$ *zu einem Einsteinschen Raum mit der konstanten Skalarkrümmung* $R = \frac{1}{\lambda}\big((2-(l+m))\, l\, m\big)$ $(l\, m > 1)$. *Die zu dieser „Normalmetrik" gehörende Riemannsche Krümmung* K *ist nichtnegativ; sie ist aber nur dann überall positiv, wenn sie konstant ist. Dabei besitzt* $G_{l,m}$ *genau dann konstantes* K, *wenn* $l=1$, $m>1$ *oder* $m=1$, $l>1$ *gilt; in diesen Fällen hat* K *den Wert* $1/\lambda$.

3.2. Wir wollen jetzt entsprechende Resultate für die nach Satz 1 neben der „Normalmetrik" einzige weitere, ebenfalls gegenüber $SO(n)$ invariante Riemannsche Metrik einer Grassmannschen Mannigfaltigkeit, nämlich für die auf $G_{2,2}$ definierte „Ausnahmemetrik" (7) mit $(\lambda > |\mu| > 0!)$ herleiten. Zu diesem Zweck führen wir die Differentialformen

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{2}}\big(\langle e_3\, de_1\rangle + \langle e_4\, de_2\rangle\big)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{2}}\big(\langle e_3\, de_2\rangle - \langle e_4\, de_1\rangle\big)$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{\lambda_2}{2}}\big(\langle e_3\, de_1\rangle - \langle e_4\, de_2\rangle\big)$$

$$\omega_4 = \sqrt{\frac{\lambda_2}{2}}\big(\langle e_3\, de_2\rangle + \langle e_4\, de_1\rangle\big)$$[23])

mit

$$0 < \lambda_1 = \lambda + \mu = \text{const}, \qquad 0 < \lambda_2 = \lambda - \mu = \text{const} \tag{35}$$

ein, wodurch (7) die Form

$$ds^2 = \sum_{a=1}^{4} (\omega_a)^2$$

annimmt (vgl. S. 341!). Der Cartansche Kalkül ergibt jetzt analog wie bei der Normalmetrik:

$$d\omega_a = -\sum_{b=1}^{4} \omega_{ab} \wedge \omega_b$$

---

[21]) Siehe [6], S. 92, Übg. 2ff.

[22]) Natürlich gilt Satz 4 in derselben Form auch für die entsprechend auf $\widetilde{G_{l,m}}$ definierte Normalmetrik, da $\widetilde{G_{l,m}}$ eine zweifache reguläre Überlagerung von $G_{l,m}$ darstellt.

[23]) Die Differentialformen $\langle e_\alpha\, de_i\rangle$, $\langle e_j\, de_i\rangle$, $\langle e_\beta\, de_\alpha\rangle$ $(1 \leqq i, j \leqq 2;\ 3 \leqq \alpha, \beta \leqq 4)$ sind hier genau so wie in 3.1 erklärt.

mit

$$\omega_{ab} = (\delta_{2a}\,\delta_{1b} - \delta_{2b}\,\delta_{1a})\,(\langle e_2\,de_1\rangle - \langle e_4\,de_3\rangle) +$$
$$+ (\delta_{4a}\,\delta_{3b} - \delta_{4b}\,\delta_{3a})\,(\langle e_2\,de_1\rangle + \langle e_4\,de_3\rangle) = -\omega_{ba} \qquad (1 \leqq a,\ b \leqq 4).$$

Daraus folgt:

$$d\omega_{ab} + \sum_{c=1}^{4} \omega_{ac} \wedge \omega_{cb} = \tfrac{1}{2} \sum_{c,d=1}^{4} Q_{abcd}\,(\omega_c \wedge \omega_d)$$

mit

$$Q_{abcd}(0, \ldots, 0) = R_{abcd}(0, \ldots, 0) = \frac{2}{\lambda_1}\,(\delta_{2a}\,\delta_{1b} - \delta_{1a}\,\delta_{2b})\,(\delta_{2c}\,\delta_{1d} - \delta_{1c}\,\delta_{2d}) +$$
$$+ \frac{2}{\lambda_2}\,(\delta_{4a}\,\delta_{3b} - \delta_{3a}\,\delta_{4b})\,(\delta_{4c}\,\delta_{3d} - \delta_{3c}\,\delta_{4d}) \qquad (1 \leqq a, b, c, d \leqq 4),$$

wobei R_{abcd} die Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors der Metrik (7) in bezug auf dasjenige lokale Koordinatensystem (v_1, v_2, v_3, v_4) bedeuten, welches durch die Koordinatentransformation:

$$v_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{2}}\,(u_{13} + u_{24})$$
$$v_2 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{2}}\,(u_{23} - u_{14})$$
$$v_3 = \sqrt{\frac{\lambda_2}{2}}\,(u_{13} - u_{24})$$
$$v_4 = \sqrt{\frac{\lambda_2}{2}}\,(u_{23} + u_{14})$$

aus den in (1) eingeführten lokalen Koordinaten $(u_{13}, u_{23}, u_{14}, u_{24})$ hervorgeht.

Der Ricci-Tensor R_{ab} berechnet sich nun im Nullpunkt zu:

$$R_{ab}(0, \ldots, 0) = -\frac{2}{\lambda_1}\,(\delta_{1a}\,\delta_{1b} + \delta_{2a}\,\delta_{2b}) - \frac{2}{\lambda_2}\,(\delta_{3a}\,\delta_{3b} + \delta_{4a}\,\delta_{4b}),$$

so daß die Konstanten $\lambda_1/2$ und $\lambda_2/2$ der Ausnahmemetrik geometrisch als die Extremwerte des für beliebige Vektoren $\mathfrak{z} = (z_a) \neq 0$ des Tangentialraums T von $G_{2,2}$ in o erklärten Quotienten

$$-\frac{\sum_{a,b=1}^{4} g_{ab}(0, \ldots, 0)\,z_a z_b}{\sum_{a,b=1}^{4} R_{ab}(0, \ldots, 0)\,z_a z_b} = \frac{(z_1)^2 + (z_2)^2 + (z_3)^2 + (z_4)^2}{\frac{2}{\lambda_1}\,((z_1)^2 + (z_2)^2) + \frac{2}{\lambda_2}\,((z_3)^2 + (z_4)^2)}$$

gedeutet werden können. Weiter besitzt die Skalarkrümmung R der Ausnahmemetrik den konstanten Wert $-4\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)$, und schließlich findet man für die Riemannsche Krümmung $K(\mathfrak{z}, \mathfrak{w})$ des von den linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{z} = (z_a)$ und $\mathfrak{w} = (w_a)$ aus T aufgespannten Flächenelements:

$$K(\mathfrak{z}, \mathfrak{w}) = 4\,\frac{\frac{1}{\lambda_1}\,(z_1 w_2 - z_2 w_1)^2 + \frac{1}{\lambda_2}\,(z_3 w_4 - z_4 w_3)^2}{\sum_{a,b=1}^{4} (z_a w_b - z_b w_a)^2} \geqq 0.$$

K ist nicht konstant, weil sich für $\mathfrak{z}^{(1)}=(\delta_{1a})$, $\mathfrak{w}^{(1)}=(\delta_{2a})$ bzw. $\mathfrak{z}^{(2)}=(\delta_{1a})$, $\mathfrak{w}^{(2)}=(\delta_{3a})$: $K(\mathfrak{z}^{(1)}, \mathfrak{w}^{(1)})=\frac{2}{\lambda_1}>0$ bzw. $K(\mathfrak{z}^{(2)}, \mathfrak{w}^{(2)})=0$ ergibt. Zusammenfassend kann unter Berücksichtigung von (35) festgestellt werden:

SATZ 5. *Die auf der Grassmannschen Mannigfaltigkeit $G_{2,2}$ definierte Riemannsche Metrik* $ds^2=\lambda\left((\langle \mathfrak{e}_3\, d\mathfrak{e}_1\rangle)^2+(\langle \mathfrak{e}_3\, d\mathfrak{e}_2\rangle)^2+(\langle \mathfrak{e}_4\, d\mathfrak{e}_1\rangle)^2+(\langle \mathfrak{e}_4 d\mathfrak{e}_2\rangle)^2\right)+2\mu\left(\langle \mathfrak{e}_3\, d\mathfrak{e}_1\rangle\langle \mathfrak{e}_4\, d\mathfrak{e}_2\rangle-\langle \mathfrak{e}_3\, d\mathfrak{e}_2\rangle\langle \mathfrak{e}_4\, d\mathfrak{e}_1\rangle\right)$ $(\lambda, \mu=\text{const},\ \lambda>|\mu|>0)$ *macht $G_{2,2}$ nicht zu einem Einsteinschen Raum. Die Konstanten λ bzw. $|\mu|$ dieser „Ausnahmemetrik" können nämlich geometrisch mit Hilfe des Ricci-Tensors $R_{(i\alpha)(j\beta)}$ als Summe bzw. Absolutbetrag der Differenz der reziproken Extremwerte von* $-\dfrac{\sum_{i,j=1}^{2}\sum_{\alpha,\beta=3}^{4} R_{(i\alpha)(j\beta)}(0,\ldots,0)\,x_{i\alpha}x_{j\beta}}{\sum_{i,j=1}^{2}\sum_{\alpha,\beta=3}^{4} g_{(i\alpha)(j\beta)}(0,\ldots,0)\,x_{i\alpha}x_{j\beta}}$ [24] *gedeutet werden, wobei $\mathfrak{x}=(x_{i\alpha})$ einen beliebigen, von Null verschiedenen Vektor des Tangentialraums T von $G_{2,2}$ in o bedeutet. $G_{2,2}$ besitzt bezüglich der Ausnahmemetrik die konstante Skalarkrümmung* $R=-\frac{8\lambda}{\lambda^2-\mu^2}$ *und eine nichtnegative (aber nicht überall positive) Riemannsche Krümmung; letztere ist nicht konstant.*

4. Bemerkungen und Zusätze

4.1. Ein großer Teil der in unseren bisherigen Sätzen aufgeführten Resultate kann auch durch Anwendung der von E. CARTAN stammenden Theorie der „symmetrischen Riemannschen homogenen Räume" erhalten werden[25]. Es handelt sich dabei, kurz gesagt, um folgendes:

Gegeben sei eine zusammenhängende Liesche Gruppe G und eine darin enthaltene kompakte Untergruppe g, deren Lie-Algebra kein von Null verschiedenes Ideal der Lie-Algebra von G enthält. Dann induziert G auf dem (im wesentlichen effektiven) homogenen Raum G/g aller Linksnebenklassen von g (bei Linksmultiplikation) eine transitive Transformationsgruppe, und G/g kann mit (mindestens) einer gegenüber dieser Gruppe invarianten Riemannschen Metrik versehen werden[26]. CARTAN nennt nun den (mit irgendeiner derartigen invarianten Riemannschen Metrik behafteten) Raum G/g einen „*symmetrischen*" Riemannschen homogenen Raum, wenn ein (stetiger) involutorischer Automorphismus σ von G existiert, dessen Fixelemente gerade die Elemente von g sind[27]. Ein derartiger symmetrischer Riemannscher Raum G/g hat die Eigenschaft, daß die kovariante Ableitung seines Riemannschen Krümmungstensors identisch verschwindet, oder — was gleichbedeutend

[24] Die Tensorkomponenten $g_{(i\alpha)(j\beta)}$ und $R_{(i\alpha)(j\beta)}$ beziehen sich auf die lokalen Koordinaten $u_{i\alpha}$ von $G_{2,2}$.

[25] Eine zusammenfassende Übersicht über diese Theorie findet sich in der Cartanschen Arbeit: „Les espaces riemanniens symétriques" [7], S. 1247—1255.

[26] Siehe auch [7], S. 1129—1130.

[27] Es genügt, hierbei vorauszusetzen, daß die Fixmenge F_σ von σ g enthält und die Komponente der Identität von F_σ in g enthalten ist (die von CARTAN gemachte Voraussetzung, g sei zusammenhängend, kann weitgehend entbehrt werden!). Siehe hierzu [7], S. 1208—1211 und [8], S. 52.

ist — daß eine Parallelverschiebung die Riemannsche Krümmung nicht ändert[28]). Weiter kann im Falle eines (nicht eindimensionalen) kompakten symmetrischen G/g ausgesagt werden, daß seine Riemannsche Krümmung überall nichtnegativ ist[29]). Besonders interessant sind die *„irreduziblen"* symmetrischen Räume G/g, welche sich etwa dadurch charakterisieren lassen, daß sie — von einem konstanten positiven Faktor abgesehen — genau eine gegenüber G invariante Riemannsche Metrik besitzen (vgl. Hilfssatz 1!). Ein symmetrischer Raum G/g ist z.B. irreduzibel, falls G eine einfache Liesche Gruppe ist[30]). Umgekehrt ist bei einem irreduziblen symmetrischen G/g mit halbeinfachem G und zusammenhängendem g entweder G einfach, oder der homogene Raum G/g ist Gruppenraum eines einfachen (abgeschlossenen) Normalteilers von G, dessen Dimension die Hälfte der Dimension von G beträgt[31]). Ein irreduzibler symmetrischer Riemannscher Raum G/g mit zusammenhängendem g ist außerdem stets ein Einsteinscher Raum (vgl. Fußnote 21)[32]). Schließlich gilt: Die (als Lie-Gruppe vorausgesetzte) Komponente der Identität aller lokalen Isometrien eines irreduziblen symmetrischen Riemannschen Raums G/g mit halbeinfachem G besitzt dieselbe Dimension wie G[33]).

Die angeführten Tatsachen können auf unser Problem angewandt werden, da sich die Grassmannschen Mannigfaltigkeiten $G_{l,m}$ bzw. $\widetilde{G_{l,m}}$ als im wesentlichen effektive homogene Räume

$$SO(l+m)/(O(l)\times O(m))\cap SO(l+m) \quad \text{bzw.} \quad SO(l+m)/SO(l)\times SO(m)$$

auffassen lassen, bei welchen durch

$$\sigma: \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1l} & c_{1l+1} & \cdots & c_{1l+m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{l1} & \cdots & c_{ll} & c_{ll+1} & \cdots & c_{ll+m} \\ c_{l+11} & \cdots & c_{l+1l} & c_{l+1l+1} & \cdots & c_{l+1l+m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{l+m1} & \cdots & c_{l+ml} & c_{l+ml+1} & \cdots & c_{l+ml+m} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1l} & -c_{1l+1} & \cdots & -c_{1l+m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{l1} & \cdots & c_{ll} & -c_{ll+1} & \cdots & -c_{ll+m} \\ -c_{l+11} & \cdots & -c_{l+1l} & c_{l+1l+1} & \cdots & c_{l+1l+m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -c_{l+m1} & \cdots & -c_{l+ml} & c_{l+ml+1} & \cdots & c_{l+ml+m} \end{pmatrix}$$

[28]) Vgl. [7], S. 604.
[29]) Vgl. [9], theorem 3.
[30]) Siehe [7], S. 1216. Die von CARTAN gemachte zusätzliche Voraussetzung, G sei kompakt, wird hier nicht benötigt.
[31]) Siehe [7], S. 1216—1217.
[32]) Siehe [7], S. 634.
[33]) Siehe [7], S. 1215.

ein die kompakte Untergruppe $(O(l)\times O(m))\cap SO(l+m)$ (deren Komponente der Identität gleich der kompakten Untergruppe $SO(l)\times SO(m)$ ist) elementweise festlassender, involutorischer Automorphismus von $SO(l+m)$ dargestellt wird. $G_{l,m}$ und $\widetilde{G_{l,m}}$ sind infolgedessen kompakte symmetrische homogene Räume im Sinne Cartans. Alle gegenüber $SO(n)$ invarianten Riemannschen Metriken dieser Räume haben also (im Fall $lm>1$) eine nichtnegative Riemannsche Krümmung (vgl. Satz 4 und Satz 5!), welche sich bei Parallelverschiebung nicht ändert[34]). Im Falle $l+m\neq 4$ sind wegen der Einfachheit von $SO(n)$ für $n\neq 4$[35]) $G_{l,m}$ und $\widetilde{G_{l,m}}$ irreduzibel und besitzen somit bis auf einen konstanten positiven Faktor nur eine einzige gegen $SO(n)$ invariante Riemannsche Metrik (vgl. Satz 1 und Satz 3!), während die Gruppe $SO(4)$ nicht einfach, ondern nur halbeinfach ist[36]). Daher kann $\widetilde{G_{2,2}}=SO(4)/SO(2)\times SO(2)$ nicht irreduzibel sein, weil sonst $\mathrm{Dim}\,\widetilde{G_{2,2}}=\frac{1}{2}\mathrm{Dim}\,SO(4)$ sein müßte (was nicht zutrifft), sodaß also mehr als eine nur von einem konstanten positiven Faktor abhängige, gegen $SO(4)$ invariante Riemannsche Metriken von $\widetilde{G_{2,2}}$ existieren müssen (vgl. Satz 3!). Aus der schon gezeigten Irreduzibilität von $\widetilde{G_{l,m}}$ im Falle $l+m\neq 4$ folgt weiter die Tatsache, daß die gegen $SO(n)$ invarianten Riemannschen Metriken $\widetilde{G_{l,m}}$ zu einem Einsteinschen Raum machen (vgl. Satz 4!)[37]). Schließlich ist die Komponente der Identität aller lokalen Isometrien eines $G_{l,m}$ bzw. $\widetilde{G_{l,m}}$ mit $lm>1$ von konstanter Riemannscher Krümmung $\frac{1}{2}lm(lm+1)$-dimensional[38]) und kann aus diesem Grunde nur dann dieselbe Dimension wie $SO(n)$ haben, wenn $\frac{1}{2}lm(lm+1)=\frac{1}{2}(l+m-1)(l+m)$, d.h. $l=1$ oder $m=1$ gilt. $G_{l,m}$ bzw. $\widetilde{G_{l,m}}$ mit $lm>1$ und $l+m\neq 4$ besitzen daher nur dann konstante Riemannsche Krümmung in bezug auf die gegen $SO(n)$ invarianten Riemannschen Metriken, wenn $l=1$ oder $m=1$ ist (vgl. Satz 4!).

4.2. Man kann analog zu den reellen Grassmannschen Mannigfaltigkeiten $G_{l,m}$ und $\widetilde{G_{l,m}}$ auch die *komplexe* Grassmannsche Mannigfaltigkeit $H_{l,m}$ als Menge aller (komplexen) l-dimensionalen Untervektorräume des komplexen n-dimensionalen Vektorraums C_n definieren ($n=l+m$). $H_{l,m}$ erweist sich dann als eine komplex analytische Mannigfaltigkeit der reellen Dimension $2lm$, auf welcher analog wie bei (1) lokale komplexe Koordinaten $w_{i\alpha}$ ($i=1,\ldots,l$; $\alpha=l+1,\ldots,n$) eingeführt werden können. Während wir früher in $G_{l,m}$ und $\widetilde{G_{l,m}}$ gegen $SO(n)$ bzw. $O(n)$ invariante Riemannsche Metriken aufsuchten, sollen jetzt entsprechend dazu *Hermitesche* Metriken von $H_{l,m}$ betrachtet werden, welche gegenüber der auf $H_{l,m}$ wirkenden *unitären unimodularen* Gruppe $SU(n)$ bzw. der *unitären* Gruppe $U(n)$ invariant sind. Dabei wird

---

[34]) Dies läßt sich für unsere durch (6) und (7) gegebenen Riemannschen Metriken auch leicht direkt durch Nachrechnung mit Hilfe des Cartanschen Kalküls bestätigen.

[35]) Siehe [*10*], theorem 82.

[36]) Siehe [*10*], S. 273, ex. 70.

[37]) Dasselbe gilt auch für $G_{l,m}$, wie eine genauere Analyse der Cartanschen Sätze zeigt.

[38]) Siehe [*6*], S. 88.

unter $U(n)$ die Gruppe aller linearen Transformationen des C_n verstanden, welche eine (ausgezeichnete) Hermitesche Bilinearform $\langle \bar{\mathfrak{x}}\, \mathfrak{y}\rangle$[39] $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in C_n)$ mit positiv definiter Hermitescher Form $\langle \bar{\mathfrak{x}}\, \mathfrak{x}\rangle$ invariant lassen, während die Transformationen von $SU(n)$ außerdem noch die Determinante 1 besitzen.

Denkt man sich nun die das lokale Koordinatensystem $\{w_{i\alpha}\}$ bestimmenden Basisvektoren $\mathring{e}_i$ und $\mathring{e}_\alpha$ unitärnormiert: $\langle \bar{\mathring{e}}_i \mathring{e}_j\rangle = \delta_{ij}$, $\langle \bar{\mathring{e}}_\alpha \mathring{e}_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}$, $\langle \bar{\mathring{e}}_i \mathring{e}_\alpha\rangle = 0$ $(1 \leqq i, j \leqq l;\ l+1 \leqq \alpha, \beta \leqq n)$, so induziert die den (durch $\{\mathring{e}_i\}$ bestimmten) Punkt $o \in H_{l,m}$ festlassende Untergruppe von $SU(n)$ im Tangentialraum U von $H_{l,m}$ in o die durch:

$$z'_{i\alpha} = \sum_{j=1}^{l} \sum_{\beta=l+1}^{n} \bar{d}_{ij}\, e_{\alpha\beta}\, z_{j\beta}$$

($z_{i\alpha}$ = Komponenten der Vektoren von U; $i = 1, \ldots, l$; $\alpha = l+1, \ldots, n$) mit

$$(d_{ij}) \in U(l), \qquad (e_{\alpha\beta}) \in U(m), \qquad \|d_{ij}\|\, \|e_{\alpha\beta}\| = 1$$

gegebene lineare Isotropiegruppe $\big(U(l) \otimes U(m)\big)^*$ (vgl. (4)!). Letztere ist in $U(n)$ enthalten; und U ist in bezug auf diese lineare Isotropiegruppe irreduzibel[40], weil aus der Irreduzibilität von C_l bezüglich $SU(l)$ und von C_m bezüglich $SU(m)$ ($SU(l)$ bzw. $SU(m)$ operiert transitiv auf den „Richtungen" von C_l bzw. C_m!) nach einem Satz bei H. WEYL[41] auch die Irreduzibilität von U bezüglich der in $\big(U(l) \otimes U(m)\big)^*$ enthaltenen Untergruppe $SU(l) \otimes SU(m)$ folgt[42]. Infolgedessen ergeben ähnlich wie beim Beweis von Hilfssatz 1 durchgeführte Überlegungen, daß die Hermiteschen Formen $\lambda \left(\sum_{i=1}^{l} \sum_{\alpha=l+1}^{n} \bar{z}_{i\alpha}\, z_{i\alpha} \right)$ mit konstantem positivem λ die einzigen, gegenüber $\big(U(l) \otimes U(m)\big)^*$ invarianten, positiv definiten Hermiteschen Formen auf U sind. Daraus folgt aber schon:

SATZ 6. *Die durch*

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{l} \sum_{\alpha=l+1}^{n} |\langle \bar{\mathfrak{e}}_\alpha\, d\mathfrak{e}_i\rangle|^2 \tag{36}$$

gegebene Hermitesche Metrik ist, von einem konstanten positiven Proportionalitätsfaktor λ abgesehen, die einzige gegenüber sowohl allen Transformationen von $SU(n)$ als auch allen Transformationen von $U(n)$ invariante Hermitesche Metrik auf der komplexen Grassmannschen Mannigfaltigkeit $H_{l,m}$[43].

[39]) Unter einer Hermiteschen Bilinearform $\langle \bar{\mathfrak{x}}\, \mathfrak{y}\rangle$ wird ein in $\bar{\mathfrak{x}}$ und $\mathfrak{y}$ lineares (komplexwertiges) Funktional mit der Symmetrieeigenschaft $\langle \bar{\mathfrak{y}}\, \mathfrak{x}\rangle = \overline{\langle \bar{\mathfrak{x}}\, \mathfrak{y}\rangle}$ verstanden. Vgl. dazu [*11*], S. 15–18.

[40]) Die Irreduzibilität eines komplexen Vektorraums in bezug auf eine darauf erklärte lineare Gruppe wird analog wie für reelle Vektorräume (vgl. Def. 1 und 2!) definiert.

[41]) Siehe [*11*], S. 126–127.

[42]) Vgl. [*12*], S. 407.

[43]) Hierbei beziehen sich die Differentialformen auf ein von den $2lm$ lokalen, reellen Koordinaten $\mathrm{Re}\, w_{i\alpha}$ und $\mathrm{Im}\, w_{i\alpha}$ von $H_{l,m}$ beliebig oft stetig differenzierbar abhängendes, unitärnormiertes Vektorfeld $\{\mathfrak{e}_j, \mathfrak{e}_\beta\}$ mit der Nebenbedingung $\mathfrak{e}_j(0, \ldots, 0) = \mathring{e}_j$, $\mathfrak{e}_\beta(0, \ldots, 0) = \mathring{e}_\beta$ $(i, j = 1, \ldots, 1;\ \alpha, \beta = l+1, \ldots, n)$ und derart, daß jeder Punkt von $H_{l,m}$ mit den Koordinaten $w_{i\alpha}$ durch das l-Bein $\{\mathfrak{e}_j(\mathrm{Re}\, w_{i\alpha}, \mathrm{Im}\, w_{i\alpha})\}$ dargestellt wird.

Wir bemerken noch: Faßt man $H_{l,m}$ als $2lm$-dimensionale reell analytische Mannigfaltigkeit auf, so erweist sich die Hermitesche Metrik (36) nach der Cartanschen Theorie wegen der Einfachheit der Lieschen Gruppe $SU(l+m)$[44]) des symmetrischen homogenen Raums $H_{l,m}=SU(l+m)/\big(U(l)\times U(m)\big)\cap SU(l+m)$ sogar als die — von einem konstanten positiven Proportionalitätsfaktor abgesehen — einzige gegen $SU(n)$ invariante *Riemannsche* Metrik von $H_{l,m}$ (vgl. 4.1!). Außerdem soll vermerkt werden, *daß die Hermitesche Metrik* (36) *eine Kählersche Metrik darstellt*[45]); es gilt nämlich mit den (23), (30) und (31) entsprechenden Abkürzungen $\omega_{(i\alpha)}=\langle\bar{\mathfrak{e}}_\alpha\, d\mathfrak{e}_i\rangle=-\overline{\omega_{(\alpha i)}}$, $\omega_{(ij)}=\langle\bar{\mathfrak{e}}_j\, d\mathfrak{e}_i\rangle=-\overline{\omega_{(ji)}}$, $\omega_{(\alpha\beta)}=\langle\bar{\mathfrak{e}}_\beta\, d\mathfrak{e}_\alpha\rangle=-\overline{\omega_{(\beta\alpha)}}$ wegen

$$(37)\qquad \begin{cases} d\mathfrak{e}_i=\sum\limits_{j=1}^{l}\omega_{(ij)}\,\mathfrak{e}_j+\sum\limits_{\beta=l+1}^{n}\omega_{(i\beta)}\,\mathfrak{e}_\beta \\ d\mathfrak{e}_\alpha=\sum\limits_{j=1}^{l}\omega_{(\alpha j)}\,\mathfrak{e}_j+\sum\limits_{\beta=l+1}^{n}\omega_{(\alpha\beta)}\,\mathfrak{e}_\beta \qquad (i=1,\ldots,l;\ \alpha=l+1,\ldots,n) \end{cases}$$

für die Differentialform $\omega=\sum\limits_{i=1}^{l}\sum\limits_{\alpha=l+1}^{n}\overline{\omega_{(i\alpha)}}\wedge\omega_{(i\alpha)}$:

$$\begin{aligned} d\omega&=\sum_{i=1}^{l}\sum_{\alpha=l+1}^{n}\big(d\,\overline{\omega_{(i\alpha)}}\wedge\omega_{(i\alpha)}-\overline{\omega_{(i\alpha)}}\wedge d\omega_{(i\alpha)}\big)\\ &=\sum_{i=1}^{l}\sum_{\alpha=l+1}^{n}\Big(\Big(\sum_{j=1}^{l}\omega_{(\alpha j)}\wedge\overline{\omega_{(ij)}}+\sum_{\beta=l+1}^{n}\omega_{(\alpha\beta)}\wedge\overline{\omega_{(i\beta)}}\Big)\wedge\omega_{(i\alpha)}-\\ &\quad-\overline{\omega_{(i\alpha)}}\wedge\Big(\sum_{j=1}^{l}\overline{\omega_{(\alpha j)}}\wedge\omega_{(ij)}+\sum_{\beta=l+1}^{n}\overline{\omega_{(\alpha\beta)}}\wedge\omega_{(i\beta)}\Big)\Big)\\ &=\sum_{i,j=1}^{l}\sum_{\alpha=l+1}^{n}\big(\omega_{(\alpha i)}\wedge\overline{\omega_{(ji)}}\wedge\omega_{(j\alpha)}+\omega_{(\alpha i)}\wedge\omega_{(j\alpha)}\wedge\overline{\omega_{(ji)}}+\\ &\quad+\sum_{i=1}^{l}\sum_{\alpha,\beta=l+1}^{n}\big(\omega_{(\beta\alpha)}\wedge\overline{\omega_{(i\alpha)}}\wedge\omega_{(i\beta)}+\overline{\omega_{(i\alpha)}}\wedge\omega_{(\beta\alpha)}\wedge\omega_{(i\beta)}\big)=0. \end{aligned}$$

Diese Kählersche Metrik (36) stimmt im Fall $l=1$ wegen

$$(38)\qquad ds^2=\sum_{\alpha=2}^{n}|\langle\bar{\mathfrak{e}}_\alpha\, d\mathfrak{e}_1\rangle|^2=\langle d\bar{\mathfrak{e}}_1\, d\mathfrak{e}_1\rangle-\langle\mathfrak{e}_1\, d\bar{\mathfrak{e}}_1\rangle\,\langle\bar{\mathfrak{e}}_1\, d\mathfrak{e}_1\rangle$$

mit der als „elliptisch" bezeichneten Hermiteschen Metrik des $(n-1)$-dimensionalen komplexen projektiven Raums überein[46]).

Schließlich führen analog wie in Abschnitt 3 der Arbeit durchgeführte Rechnungen zu folgenden Resultaten für die Krümmungseigenschaften des als $2lm$-dimensionale reell analytische Mannigfaltigkeit aufgefaßten und mit der Riemannschen Metrik $ds^2=\lambda\Big(\sum\limits_{i=1}^{l}\sum\limits_{\alpha=l+1}^{n}|\langle\bar{\mathfrak{e}}_\alpha\, d\mathfrak{e}_i\rangle|^2\Big)$ $(\lambda>0)$ versehenen Raums $H_{l,m}$: Die Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors bezüglich der

[44]) Siehe [*10*], theorem 82.
[45]) Vgl. [*13*].
[46]) Siehe [*14*], S. 116.

lokalen Koordinaten $\operatorname{Re} w_{i\alpha}$ und $\operatorname{Im} w_{i\alpha}$ [vgl. Fußnote [43])] von $H_{l,m}$ im Nullpunkt berechnen sich zu

$$R_{(i\alpha)(j\beta)(k\gamma)(h\delta)}(0,\ldots,0) = R_{(i\alpha)(j\beta)(\overline{k\gamma})(\overline{h\delta})}(0,\ldots,0)$$
$$= R_{(\overline{i\alpha})(\overline{j\beta})(k\gamma)(h\delta)}(0,\ldots,0) = R_{(\overline{i\alpha})(\overline{j\beta})(\overline{k\gamma})(\overline{h\delta})}(0,\ldots,0)$$
$$= \lambda\left((\delta_{ik}\,\delta_{jh} - \delta_{ih}\,\delta_{jk})\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{\gamma\delta} + \delta_{ij}\,\delta_{kh}(\delta_{\alpha\gamma}\,\delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\,\delta_{\beta\gamma})\right)$$

und

$$R_{(i\alpha)(\overline{j\beta})(k\gamma)(\overline{h\delta})}(0,\ldots,0) = -\,R_{(i\alpha)(\overline{j\beta})(\overline{k\gamma})(h\delta)}(0,\ldots,0)$$
$$= R_{(\overline{i\alpha})(j\beta)(\overline{k\gamma})(h\delta)}(0,\ldots,0) = -\,R_{(\overline{i\alpha})(j\beta)(k\gamma)(\overline{h\delta})}(0,\ldots,0)$$
$$= \lambda\left((\delta_{ik}\,\delta_{jh} + \delta_{ih}\,\delta_{jk})\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{\gamma\delta} + \delta_{ij}\,\delta_{kh}(\delta_{\alpha\gamma}\,\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\,\delta_{\beta\gamma})\right)$$ [47]),

während die restlichen Komponenten des Krümmungstensors gleich Null sind. *Daraus folgt, daß $H_{l,m}$ einen Einsteinschen Raum mit der konstanten Skalarkrümmung $R = -\frac{4}{\lambda}\,lm(l+m)$ darstellt, dessen Riemannsche Krümmung K zwar überall nichtnegativ, aber nur dann überall positiv ist, wenn $l=1$ oder $m=1$ gilt. In diesem Fall ($H_{l,m}$ = komplexer projektiver Raum) besitzt K nur für $l=m=1$ den konstanten Wert $4/\lambda$, während K sonst alle Werte zwischen $1/\lambda$ und $4/\lambda$ annimmt. Auch in den übrigen Fällen $l>1$ und $m>1$ ist K nicht konstant.*

4.3. Bildet man jeden l-dimensionalen Untervektorraum V_l des n-dimensionalen euklidischen Vektorraums V_n auf den zu V_l bezüglich V_n total orthogonalen m-dimensionalen Untervektorraum V_m ab, so entsteht eine homöomorphe Abbildung A von $G_{l,m}$ auf $G_{m,l}$. Analog dazu kann ein Homöomorphismus $\tilde{A}$ von $\widetilde{G_{l,m}}$ auf $\widetilde{G_{m,l}}$ sowie ein Homöomorphismus B von $H_{l,m}$ auf $H_{m,l}$ erklärt werden. Alle diese Abbildungen sind (beliebig oft) differenzierbar, wie man etwa im Falle von B folgendermaßen einsieht: Die Vektoren $\mathfrak{f}_i = \mathring{\mathfrak{e}}_i + \sum_{\beta=l+1}^{n} w_{i\beta}\,\mathring{\mathfrak{e}}_\beta \quad (i=1,\ldots,l)$ sind zu den Vektoren $\mathfrak{g}_\alpha = \mathring{\mathfrak{e}}_\alpha - \sum_{j=1}^{l} \overline{w_{j\alpha}}\,\mathring{\mathfrak{e}}_j$ $(\alpha = l+1,\ldots,n)$ „orthogonal", d.h. es gilt $\bar{\mathfrak{f}}_i\,\mathfrak{g}_\alpha = 0$ (wenn $\{\mathring{\mathfrak{e}}_i, \mathring{\mathfrak{e}}_\alpha\}$ unitärnormiert gewählt wird), so daß sich B in den durch die n-Beine $\{\mathring{\mathfrak{e}}_i, \mathring{\mathfrak{e}}_\alpha\}$ bzw. $\{\mathring{\mathfrak{e}}_\alpha, \mathring{\mathfrak{e}}_i\}$ bestimmten, lokalen Koordinaten $\operatorname{Re} w_{i\alpha}$ und $\operatorname{Im} w_{i\alpha}$ bzw. $\operatorname{Re} w_{\alpha i}$ und $\operatorname{Im} w_{\alpha i}$ von $H_{l,m}$ bzw. $H_{m,l}$ durch:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Re} w_{\alpha i} &= -\operatorname{Re} w_{i\alpha} \\ \operatorname{Im} w_{\alpha i} &= \operatorname{Im} w_{i\alpha} \end{aligned}\right\} \qquad (i=1,\ldots,l;\ \alpha = l+1,\ldots,n)$$

darstellt.

Jetzt gilt: *A und $\tilde{A}$ bzw. B sind isometrische Abbildungen der mit den Normalmetriken $\lambda\left(\sum_{i=1}^{l}\sum_{\alpha=l+1}^{n}\langle \mathfrak{e}_\alpha\, d\,\mathfrak{e}_i\rangle^2\right)$ und $\lambda\left(\sum_{\alpha=l+1}^{n}\sum_{i=1}^{l}\langle \mathfrak{e}_i\, d\,\mathfrak{e}_\alpha\rangle^2\right)$ versehenen Räume*

[47]) Hierbei beziehen sich die nichtüberstrichenen bzw. die überstrichenen Komponenten des Krümmungstensors auf die Koordinaten $\operatorname{Re} w_{i\alpha}$ bzw. $\operatorname{Im} w_{i\alpha}$ von $H_{l,m}$.

$G_{l,m}$ *und* $G_{m,l}$ *sowie* (*im Falle* $l=m=2$) *des mit den Ausnahmemetriken*

$$\lambda(\langle \mathfrak{e}_3\, d\mathfrak{e}_1\rangle^2+\langle \mathfrak{e}_3\, d\mathfrak{e}_2\rangle^2+\langle \mathfrak{e}_4\, d\mathfrak{e}_1\rangle^2+\langle \mathfrak{e}_4\, d\mathfrak{e}_2\rangle^2)+ \\ +2\mu(\langle \mathfrak{e}_3\, d\mathfrak{e}_1\rangle\langle \mathfrak{e}_4\, d\mathfrak{e}_2\rangle-\langle \mathfrak{e}_3\, d\mathfrak{e}_2\rangle\langle \mathfrak{e}_4\, d\mathfrak{e}_1\rangle)$$

und

$$\lambda(\langle \mathfrak{e}_1\, d\mathfrak{e}_3\rangle^2+\langle \mathfrak{e}_1\, d\mathfrak{e}_4\rangle^2+\langle \mathfrak{e}_2\, d\mathfrak{e}_3\rangle^2+\langle \mathfrak{e}_2\, d\mathfrak{e}_4\rangle^2)+ \\ +2\mu(\langle \mathfrak{e}_1\, d\mathfrak{e}_3\rangle\langle \mathfrak{e}_2\, d\mathfrak{e}_4\rangle-\langle \mathfrak{e}_1\, d\mathfrak{e}_4\rangle\langle \mathfrak{e}_2\, d\mathfrak{e}_3\rangle)$$

versehenen Raums $G_{2,2}$ *bzw. der mit den Hermiteschen Metriken* $\lambda\Big(\sum_{i=1}^{l}\sum_{\alpha=l+1}^{n}|\langle \bar{\mathfrak{e}}_\alpha\, d\mathfrak{e}_i\rangle|^2\Big)$ *und* $\lambda\Big(\sum_{\alpha=l+1}^{n}\sum_{i=1}^{l}|\langle \bar{\mathfrak{e}}_i\, d\mathfrak{e}_\alpha\rangle|^2\Big)$ *versehenen Räume* $H_{l,m}$ *und* $H_{m,l}$. Dies folgt nämlich unmittelbar aus den Beziehungen $\langle \mathfrak{e}_\alpha\, d\mathfrak{e}_i\rangle=-\langle \mathfrak{e}_i\, d\mathfrak{e}_\alpha\rangle$ bzw. $\langle \bar{\mathfrak{e}}_\alpha\, d\mathfrak{e}_i\rangle=-\langle \overline{\bar{\mathfrak{e}}_i\, d\mathfrak{e}_\alpha}\rangle$ $(i=1,\ldots,l;\ \alpha=l+1,\ldots,n)$.

4.4. Sind $\mathfrak{v}_1,\ldots,\mathfrak{v}_l$ l Vektoren eines (reellen oder komplexen) n-dimensionalen Vektorraums $(1\leqq l\leqq n-1)$, so werde im folgenden mit $[\mathfrak{v}_1\ldots\mathfrak{v}_l]$ derjenige Vektor des $\binom{n}{l}$-dimensionalen (reellen oder komplexen) Vektorraums bezeichnet, dessen Komponenten die (irgendwie angeordneten) l-reihigen Unterdeterminanten der aus den (sich auf eine beliebige Basis des n-dimensionalen Vektorraums beziehenden) Komponenten $\alpha_i^{(\nu)}$ von $\mathfrak{v}_i$ gebildeten Matrix $(\alpha_i^{(\nu)})$ sind $(i=1,\ldots,l;\ \nu=1,\ldots,n)$. Nun können bekanntlich die Grassmannschen Mannigfaltigkeiten $G_{l,m}$ bzw. $H_{l,m}$ als algebraische Untermannigfaltigkeiten des $\left(\binom{n}{l}-1\right)$-dimensionalen reellen bzw. komplexen projektiven Raums aufgefaßt werden[48]), indem man jedem Punkt p aus $G_{l,m}$ bzw. $H_{l,m}$ als „Grassmannsche projektive Koordinaten" die (nicht alle verschwindenden) Komponenten von $[\mathfrak{v}_1,\ldots,\mathfrak{v}_l]$ zuordnet, wobei $\mathfrak{v}_1,\ldots,\mathfrak{v}_l$ l linear unabhängige, sonst aber beliebige Vektoren aus dem p bestimmenden l-dimensionalen Untervektorraum des n-dimensionalen reellen bzw. komplexen Vektorraums V_n bzw. C_n sind. Bezieht man die Vektoren $\mathfrak{v}_1,\ldots,\mathfrak{v}_l$ und $\mathfrak{w}_1,\ldots,\mathfrak{w}_l$ dieses n-dimensionalen Vektorraums auf eine orthonormierte bzw. unitärnormierte Basis $\{\mathfrak{e}_\nu\}$ $(\nu=1,\ldots,n)$ desselben und führt man in dem $\binom{n}{l}$-dimensionalen Vektorraum in trivialer Weise ein inneres Produkt bzw. eine Hermitesche Bilinearform ein, so gilt auf Grund des verallgemeinerten Determinantenmultiplikationssatzes:

$$\langle[\mathfrak{v}_1\ldots\mathfrak{v}_l]\,[\mathfrak{w}_1\ldots\mathfrak{w}_l]\rangle=\|\langle\mathfrak{v}_i\,\mathfrak{w}_j\rangle\| \tag{39}$$

bzw.

$$\langle[\bar{\mathfrak{v}}_1\ldots\bar{\mathfrak{v}}_l]\,[\mathfrak{w}_1\ldots\mathfrak{w}_l]\rangle=\|\langle\bar{\mathfrak{v}}_i\,\mathfrak{w}_j\rangle\| \qquad (i,j=1,\ldots,l). \tag{40}$$

Jetzt ist es nicht schwer einzusehen, daß die beschriebene „Plückersche Einbettung" von $G_{l,m}$ bzw. $H_{l,m}$ in den $\left(\binom{n}{l}-1\right)$-dimensionalen reellen bzw.

[48]) Siehe [*15*]. S. 312.

komplexen projektiven Raum $P_{\binom{n}{l}-1}$ bzw. $Q_{\binom{n}{l}-1}$ durch eine „reguläre" Abbildung vermittelt wird. Darunter verstehen wir eine Abbildung, die sich in den lokalen reellen bzw. komplexen Koordinaten $u_{i\alpha}$ bzw. $w_{i\alpha}$ von $G_{l,m}$ bzw. $H_{l,m}$ und den lokalen reellen bzw. komplexen Koordinaten u_I bzw. w_I von $P_{\binom{n}{l}-1}=G_{1,\binom{n}{l}-1}$ bzw. $Q_{\binom{n}{l}-1}=H_{1,\binom{n}{l}-1}$ durch

$$u_I=\Phi_I(u_{i\alpha}) \qquad \text{bzw.} \qquad w_I=\Psi_I(w_{i\alpha})$$

mit (beliebig oft) stetig nach allen Variablen differenzierbaren Funktionen Φ_I bzw. Ψ_I ausdrücken läßt, deren Funktionalmatrizen $\left(\frac{\partial\Phi_I}{\partial u_{i\alpha}}\right)$ bzw. $\left(\frac{\partial\Psi_I}{\partial w_{i\alpha}}\right)$ überall Maximalrang besitzen (hierbei durchläuft der Index I etwa alle Kombinationen $(\nu_1,\ldots,\nu_l)$ mit $1\leqq\nu_1<\nu_2<\cdots<\nu_l\leqq n$ und $\nu_l>l$). Legt man nämlich die lokalen Koordinaten von $G_{l,m}$ bzw. $H_{l,m}$ mittels des n-Beins $\{\mathring{e}_\nu\}$ und legt man die lokalen Koordinaten von $G_{1,\binom{n}{l}-1}$ bzw. $H_{1,\binom{n}{l}-1}$ mittels des wegen (39) und (40) orthonormierten bzw. unitärnormierten $\binom{n}{l}$-Beins $\{[\mathring{e}_{\nu_1}\ldots\mathring{e}_{\nu_l}]\}$ $(1\leqq\nu_1<\cdots<\nu_l\leqq n)$ fest, so wird jeder in einer Umgebung des Punkts $u_I=0$ bzw. $w_I=0$ gelegene Punkt aus $G_{1,\binom{n}{l}-1}$ bzw. $H_{1,\binom{n}{l}-1}$ durch einen Vektor

$$(41)\qquad \begin{cases} \mathfrak{f}_{1\ldots l}=[\mathring{e}_1\ldots\mathring{e}_l]+\sum\limits_{1\leqq\nu_1<\cdots<\nu_l\leqq n,\ l<\nu_l} u_{\nu_1\ldots\nu_l}[\mathring{e}_{\nu_1}\ldots\mathring{e}_{\nu_l}] \\ \text{bzw.} \\ \mathfrak{f}_{1\ldots l}=[\mathring{e}_1\ldots\mathring{e}_l]+\sum\limits_{1\leqq\nu_1<\cdots<\nu_l\leqq n,\ l<\nu_l} w_{\nu_1\ldots\nu_l}[\mathring{e}_{\nu_1}\ldots\mathring{e}_{\nu_l}] \end{cases}$$

dargestellt. Weiter läßt sich jeder in einer Umgebung von $w_{i\alpha}=0$ gelegene Punkt aus $H_{l,m}$ durch die Vektoren $\mathfrak{f}_i=\mathring{e}_i+\sum\limits_{\alpha=l+1}^{n} w_{i\alpha}\mathring{e}_\alpha$ $(i=1,\ldots,l)$ darstellen und besitzt somit als Grassmannsche Koordinaten die Komponenten des Vektors $[\mathfrak{f}_1\ldots\mathfrak{f}_l]$, welcher sich folgendermaßen durch die Basisvektoren $[\mathring{e}_{\nu_1}\ldots\mathring{e}_{\nu_l}]$ linear kombinieren läßt:

$$(42)\qquad \begin{cases} [\mathfrak{f}_1\ldots\mathfrak{f}_l]=[\mathring{e}_1\ldots\mathring{e}_l]+\sum\limits_{i=1}^{l}\sum\limits_{\alpha=l+1}^{n}(-1)^{l-i}w_{i\alpha}[\mathring{e}_1\ldots\mathring{e}_{i-1}\mathring{e}_{i+1}\ldots\mathring{e}_l\mathring{e}_\alpha]+ \\ \qquad +\sum\limits_{1\leqq\nu_1<\cdots<\nu_l\leqq n,\ l<\nu_{l-1}} F_{\nu_1\ldots\nu_l}(w_{j\beta})[\mathring{e}_{\nu_1}\ldots\mathring{e}_{\nu_l}] \\ \qquad (1\leqq j\leqq l;\ l+1\leqq\beta\leqq n), \end{cases}$$

wobei die $F_{\nu_1\ldots\nu_l}$ homogene Polynome in den $w_{j\beta}$ von mindestens zweitem Grade sind. Durch Vergleich von (41) und (42) folgt jetzt für die Funktionen Ψ_I unserer Abbildung von $H_{l,m}$ in $H_{1,\binom{n}{l}-1}$:

$$\Psi_{1\ldots i-1\,i+1\ldots l\,\alpha}(w_{j\beta})=(-1)^{l-i}w_{i\alpha} \qquad (1\leqq i\leqq l;\ l+1\leqq\alpha\leqq n)$$

$$\Psi_{\nu_1\ldots\nu_l}(w_{j\beta})=F_{\nu_1\ldots\nu_l}(w_{j\beta}) \qquad (1\leqq\nu_1<\cdots<\nu_l\leqq n;\ l<\nu_{l-1}),$$

und analoge Formeln gelten auch für die Funktionen Φ_I. Die Funktionen Φ_I und Ψ_I besitzen also in der Tat die angegebenen Eigenschaften und vermitteln somit eine reguläre Abbildung. Nun kann man außerdem zeigen:

Satz 7. *Die bei der Plückerschen Einbettung der Grassmannschen Mannigfaltigkeiten $G_{l,m}$ bzw. $H_{l,m}$ in die projektiven Räume $P_{\binom{n}{l}-1}$ bzw. $Q_{\binom{n}{l}-1}$ durch die elliptischen Riemannschen bzw. elliptischen Hermiteschen Metriken $dS^2=\lambda(\langle d\mathfrak{e}_{1\dots l}\, d\mathfrak{e}_{1\dots l}\rangle)$ bzw. $dS^2=\lambda\left(\langle d\overline{\mathfrak{e}_{1\dots l}}\, d\mathfrak{e}_{1\dots l}\rangle-\langle\mathfrak{e}_{1\dots l}\, d\overline{\mathfrak{e}_{1\dots l}}\rangle\langle\mathfrak{e}_{1\dots l}\, d\mathfrak{e}_{1\dots l}\rangle\right)$ $(\lambda>0)$ (vgl. Fußnote [8]) und (38)) von $P_{\binom{n}{l}-1}$ bzw. $Q_{\binom{n}{l}-1}$ auf $G_{l,m}$ bzw. $H_{l,m}$ induzierten Riemannschen bzw. Hermiteschen Metriken stimmen mit den gegen $O(n)$ bzw. $U(n)$ invarianten Metriken $ds^2=\lambda\Big(\sum_{i=1}^{l}\sum_{\alpha=l+1}^{n}\langle\mathfrak{e}_\alpha\, d\mathfrak{e}_i\rangle^2\Big)$ bzw. $ds^2=\lambda\Big(\sum_{i=1}^{l}\sum_{\alpha=l+1}^{n}|\langle\overline{\mathfrak{e}}_\alpha\, d\mathfrak{e}_i\rangle|^2\Big)$ $(\lambda>0)$ von $G_{l,m}$ bzw. $H_{l,m}$ überein.*

Beweis. Wir wollen den Beweis der die Einbettung von $H_{l,m}$ in $Q_{\binom{n}{l}-1}$ betreffenden Behauptung von Satz 7 durchführen; der Beweis der Behauptung über die Einbettung von $G_{l,m}$ in $P_{\binom{n}{l}-1}$ verläuft dann ganz analog. Zu diesem Zweck benutzen wir, daß die durch die angegebene elliptische Hermitesche Metrik von $Q_{\binom{n}{l}-1}$ in $H_{l,m}$ induzierte Hermitesche Metrik das Linienelementquadrat

$$ds_1^2=\lambda\left(\langle d[\overline{\mathfrak{e}}_1\dots\overline{\mathfrak{e}}_l]\, d[\mathfrak{e}_1\dots\mathfrak{e}_l]\rangle-\langle[\mathfrak{e}_1\dots\mathfrak{e}_l]\, d[\overline{\mathfrak{e}}_1\dots\overline{\mathfrak{e}}_l]\rangle\langle[\overline{\mathfrak{e}}_1\dots\overline{\mathfrak{e}}_l]\, d[\mathfrak{e}_1\dots\mathfrak{e}_l]\rangle\right)$$

besitzt, wobei die $\mathfrak{e}_j=\mathfrak{e}_j(\mathrm{Re}\, w_{i\alpha},\ \mathrm{Im}\, w_{i\alpha})$ solche (beliebig oft) stetig differenzierbar von den lokalen reellen Koordinaten von $H_{l,m}$ abhängende, unitärnormierte Vektorfunktionen mit der Nebenbedingung $\mathfrak{e}_j(0,\dots,0)=\mathring{\mathfrak{e}}_j$ sind $(1\leqq i,\ j\leqq l;\ l+1\leqq\alpha\leqq n)$, daß der Punkt mit den Koordinaten $w_{i\alpha}$ von $H_{l,m}$ durch die Vektoren $\mathfrak{e}_j(\mathrm{Re}\, w_{i\alpha},\ \mathrm{Im}\, w_{i\alpha})$ dargestellt wird. Damit erhalten wir zusammen mit (37) und (40):

$$\begin{aligned}
ds_1^2&=\lambda\sum_{i,j=1}^{l}\Big(\langle[\overline{\mathfrak{e}}_1\dots\overline{\mathfrak{e}}_{i-1}\, d\overline{\mathfrak{e}}_i\,\overline{\mathfrak{e}}_{i+1}\dots\overline{\mathfrak{e}}_l]\,[\mathfrak{e}_1\dots\mathfrak{e}_{j-1}\, d\mathfrak{e}_j\,\mathfrak{e}_{j+1}\dots\mathfrak{e}_l]\rangle-\\
&\quad-\langle[\mathfrak{e}_1\dots\mathfrak{e}_l]\,[\overline{\mathfrak{e}}_1\dots\overline{\mathfrak{e}}_{i-1}\, d\overline{\mathfrak{e}}_i\,\overline{\mathfrak{e}}_{i-1}\dots\overline{\mathfrak{e}}_l]\rangle\langle[\overline{\mathfrak{e}}_1\dots\overline{\mathfrak{e}}_l]\,[\mathfrak{e}_1\dots\mathfrak{e}_{j-1}\, d\mathfrak{e}_j\,\mathfrak{e}_{j+1}\dots\mathfrak{e}_l]\rangle\Big)\\
&=\lambda\sum_{i,j=1}^{l}\Big\langle\Big(\overline{\omega_{ii}}[\overline{\mathfrak{e}}_1\dots\overline{\mathfrak{e}}_l]+\sum_{\alpha=l+1}^{n}\overline{\omega_{i\alpha}}[\overline{\mathfrak{e}}_1\dots\overline{\mathfrak{e}}_{i-1}\,\overline{\mathfrak{e}}_\alpha\,\overline{\mathfrak{e}}_{i+1}\dots\overline{\mathfrak{e}}_l]-\overline{\omega_{ii}}[\overline{\mathfrak{e}}_1\dots\overline{\mathfrak{e}}_l]\Big)\times\\
&\quad\times[\mathfrak{e}_1\dots\mathfrak{e}_{j-1}\, d\mathfrak{e}_j\,\mathfrak{e}_{j+1}\dots\mathfrak{e}_l]\Big\rangle\\
&=\lambda\sum_{i,j=1}^{l}\sum_{\alpha=l+1}^{n}\overline{\omega_{i\alpha}}\Big\langle[\overline{\mathfrak{e}}_1\dots\overline{\mathfrak{e}}_{i-1}\,\overline{\mathfrak{e}}_\alpha\,\overline{\mathfrak{e}}_{i+1}\dots\overline{\mathfrak{e}}_l]\times\\
&\quad\times\Big(\omega_{jj}[\mathfrak{e}_1\dots\mathfrak{e}_l]+\sum_{\beta=l+1}^{n}\omega_{j\beta}[\mathfrak{e}_1\dots\mathfrak{e}_{j-1}\,\mathfrak{e}_\beta\,\mathfrak{e}_{j+1}\dots\mathfrak{e}_l]\Big)\Big\rangle\\
&=\lambda\sum_{i,j=1}^{l}\sum_{\alpha,\beta=l+1}^{n}\overline{\omega_{i\alpha}}\,\omega_{j\beta}\langle[\overline{\mathfrak{e}}_1\dots\overline{\mathfrak{e}}_{i-1}\,\overline{\mathfrak{e}}_\alpha\,\overline{\mathfrak{e}}_{i+1}\dots\overline{\mathfrak{e}}_l]\,[\mathfrak{e}_1\dots\mathfrak{e}_{j-1}\,\mathfrak{e}_\beta\,\mathfrak{e}_{j+1}\dots\mathfrak{e}_l]\rangle\\
&=\lambda\sum_{i=1}^{l}\sum_{\alpha=l+1}^{n}\overline{\omega_{i\alpha}}\,\omega_{i\alpha}=\lambda\Big(\sum_{i=1}^{l}\sum_{\alpha=l+1}^{n}|\langle\overline{\mathfrak{e}}_\alpha\, d\mathfrak{e}_i\rangle|^2\Big)=ds^2.\qquad\text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

4.5. Gelegentlich werden in der Differentialgeometrie auch nicht notwendig positiv definite, nichtausgeartete quadratische Differentialformen[49]) in einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit betrachtet. So liegt es nahe, in unserem Falle nichtausgeartete, gegen $SO(n)$ sowie gegen $O(n)$ bzw. gegen $SU(n)$ sowie gegen $U(n)$ invariante quadratische bzw. Hermitesche Differentialformen in $G_{l,m}$ und $\widetilde{G_{l,m}}$ bzw. $H_{l,m}$ zu untersuchen. Dabei zeigt es sich, daß die in Satz 1, Satz 2, Satz 3 und Satz 6 angegebenen Differentialformen auch die einzig möglichen *nichtausgearteten* quadratischen bzw. Hermiteschen Differentialformen mit den geforderten Eigenschaften sind, wenn man in diesen Sätzen nur die Konstanten λ und μ an Stelle von $\lambda>0$ und $\lambda>|\mu|$ den schwächeren Bedingungen $\lambda\neq 0$ und $|\lambda|\neq|\mu|$ unterwirft. (Zum Beweis dieser Tatsache braucht lediglich Hilfssatz 1 geeignet modifiziert zu werden!).

4.6. Neben den in 1. und 4.2 definierten Grassmannschen Mannigfaltigkeiten $G_{l,m}$, $\widetilde{G_{l,m}}$ und $H_{l,m}$ spielt (insbesondere in der Integralgeometrie) auch die Menge $I_{l,m}$ aller l-dimensionalen *linearen Unterräume* A_l des n-dimensionalen reellen *affinen Raums* A_n eine Rolle ($m=n-l$; $l\geqq 1$, $m\geqq 1$). Ein „Punkt" o von $I_{l,m}$ wird etwa in Parameterdarstellung (bei einem geeigneten Koordinatensystem von A_n) durch

$$\mathfrak{x}=\sum_{i=1}^{l}\xi_i\,\mathring{\mathfrak{e}}_i \tag{43}$$

dargestellt, wobei mit $\mathring{\mathfrak{e}}_i$ $(i=1,\ldots,l)$ l linear unabhängige Vektoren des n-dimensionalen Vektorraums V_n bezeichnet sind. Ergänzt man dieses l-Bein mittels der Vektoren $\mathring{\mathfrak{e}}_\alpha$ $(\alpha=l+1,\ldots,n)$ zu einem n-Bein von V_n, so kann jeder „Nachbarpunkt" von o in Parameterdarstellung in der Form

$$\mathfrak{x}=\Big(\sum_{\alpha=l+1}^{n}u_\alpha\,\mathring{\mathfrak{e}}_\alpha\Big)+\sum_{i=1}^{l}\xi_i\Big(\mathring{\mathfrak{e}}_i+\sum_{\alpha=l+1}^{n}u_{i\alpha}\,\mathring{\mathfrak{e}}_\alpha\Big) \tag{44}$$

(vgl. (1)!) angegeben werden. Hierbei gehören zu verschiedenen Koeffizientengesamtheiten $(u_\alpha, u_{i\alpha})$ verschiedene lineare Unterräume von A_n, d.h. verschiedene Punkte von $I_{l,m}$, so daß sich $I_{l,m}$ als eine reell analytische Mannigfaltigkeit der Dimension $(l+1)m$ mit den (durch das n-Bein $\{\mathring{\mathfrak{e}}_i, \mathring{\mathfrak{e}}_\alpha\}$ und den Nullpunkt des A_n bestimmten) lokalen Koordinaten u_α und $u_{i\alpha}$ $(i=1,\ldots,l;$ $\alpha=l+1,\ldots,n)$ erweist.

In Analogie zu den früher betrachteten Grassmannschen Mannigfaltigkeiten wollen wir nun auf $I_{l,m}$ alle Riemannschen Metriken zu bestimmen suchen, welche gegenüber derjenigen Gruppe invariant sind, die von der Gruppe $SB(n)$ aller eigentlichen Bewegungen des (mit einer euklidischen Struktur versehenen) Raums A_n auf $I_{l,m}$ induziert wird. Zu diesem Zweck denken wir

[49]) Unter einer „nichtausgearteten" quadratischen Differentialform bzw. Hermiteschen Differentialform versteht man eine quadratische bzw. Hermitesche Differentialform, bei welcher die aus ihren Koeffizienten gebildete Determinante von Null verschieden ist.

uns das n-Bein $\{\mathring{e}_i, \mathring{e}_\alpha\}$ orthonormiert. Dann führt ein beliebiges, den linearen Unterraum (43) als Ganzes festlassendes Element von $SB(n)$ den benachbarten linearen Unterraum (44) in den linearen Unterraum

$$(45)\quad \mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{l} a_i \mathring{e}_i + \sum_{\alpha=l+1}^{n} u_\alpha \Big(\sum_{\beta=l+1}^{n} b_{\beta\alpha} \mathring{e}_\beta \Big) + \sum_{i=1}^{l} \xi_i \Big(\sum_{j=1}^{l} a_{ji} \mathring{e}_j + \sum_{\alpha=l+1}^{n} u_{i\alpha} \Big(\sum_{\beta=l+1}^{n} b_{\beta\alpha} \mathring{e}_\beta \Big) \Big)$$

über, wobei (a_{ij}) und $(b_{\alpha\beta})$ zwei orthogonale Matrizen sind, deren Determinanten $\|a_{ij}\|$ und $\|b_{\alpha\beta}\|$ gleiches Vorzeichen besitzen, während die l Größen a_i keiner Einschränkung unterliegen. Der lineare Unterraum (45) gestattet, wie eine leichte Umrechnung zeigt, auch die Parameterdarstellung:

$$\mathfrak{x} = \Big(\sum_{\alpha=l+1}^{n} u'_\alpha \mathring{e}_\alpha \Big) + \sum_{i=1}^{l} \eta_i \Big(\mathring{e}_i + \sum_{\alpha=l+1}^{n} u'_{i\alpha} \mathring{e}_\alpha \Big)$$

mit

$$u'_\alpha = \sum_{\beta=l+1}^{n} b_{\alpha\beta} u_\beta - \sum_{i,k=1}^{l} \sum_{\beta=l+1}^{n} a_k a_{kj} b_{\alpha\beta} u_{j\beta},$$

$$u'_{i\alpha} = \sum_{j=1}^{l} \sum_{\beta=l+1}^{n} a_{ij} b_{\alpha\beta} u_{j\beta} \qquad (i = 1, \ldots, l;\ \alpha = l+1, \ldots, n).$$

Daraus folgt, daß die (in dem Tangentialraum U von $I_{l,m}$ im Punkt o operierende) lineare Isotropiegruppe Δ von $I_{l,m}$ bezüglich $SB(n)$ aus den linearen Transformationen

$$(46)\quad \begin{cases} x'_\alpha = \sum_{\beta=l+1}^{n} b_{\alpha\beta} x_\beta - \sum_{j,k=1}^{l} \sum_{\beta=l+1}^{n} a_k a_{kj} b_{\alpha\beta} x_{j\beta} \\ x'_{i\alpha} = \sum_{j=1}^{l} \sum_{\beta=l+1}^{n} a_{ij} b_{\alpha\beta} x_{j\beta} \qquad (i = 1, \ldots, l;\ \alpha = l+1, \ldots, n) \end{cases}$$

besteht (vgl. (4); x_α und $x_{i\alpha}$ = Komponenten der Vektoren von U!).

Die Bestimmung aller gegenüber $SB(n)$ invarianten Riemannschen Metriken von $I_{l,m}$ erweist sich jetzt wieder als äquivalent mit der Angabe aller positiv definiten und gegenüber Δ invarianten quadratischen Formen der Variablen x_α und $x_{i\alpha}$. Nun existiert allerdings keine einzige derartige quadratische Form, da anderenfalls die von den Translationen das A_n in $I_{l,m}$ induzierte und aus den Elementen

$$(47)\quad \begin{cases} x'_\alpha = x_\alpha - \sum_{k=1}^{l} a_k x_{k\alpha} \\ x'_{i\alpha} = x_{i\alpha} \qquad (i = 1, \ldots, l;\ \alpha = l+1, \ldots, n) \end{cases}$$

bestehende Untergruppe Δ_1 von Δ als abgeschlossene Untergruppe der kompakten Gruppe aller die quadratische Form invariant lassenden linearen Transformationen ebenfalls kompakt sein müßte, was offensichtlich nicht zutrifft.

Infolgedessen gibt es überhaupt keine gegen $SB(n)$ invariante Riemannsche Metrik von $I_{l,m}$. Damit ist allerdings noch nichts über die Existenz von gegen $SB(n)$ invarianten, nichtausgearteten quadratischen Differentialformen in $I_{l,m}$ gesagt, worüber der folgende Satz Auskunft gibt:

SATZ 8. *Nichtausgeartete und gegen $SB(n)$ invariante quadratische Differentialformen in $I_{l,m}$ sind nur im Fall $l=1$ und $m=2$ vorhanden; ihre Gesamtheit wird dargestellt durch:*

$$2\lambda(\langle \mathfrak{e}_2\, d\mathfrak{p}\rangle\langle \mathfrak{e}_3\, d\mathfrak{e}_1\rangle - \langle \mathfrak{e}_3\, d\mathfrak{p}\rangle\langle \mathfrak{e}_2\, d\mathfrak{e}_1\rangle) + \mu\left((\langle \mathfrak{e}_2\, d\mathfrak{e}_1\rangle)^2 + (\langle \mathfrak{e}_3\, d\mathfrak{e}_1\rangle)^2\right)^{50})$$
$$(\lambda, \mu = \text{reelle Konstante};\ \lambda \neq 0).$$

BEWEIS. Nach einer vorigen Bemerkung und auf Grund der Bedeutung von $\mathfrak{p}, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ genügt es nachzuweisen, daß im Fall $l=1$, $m=2$

$$2\lambda(x_2 x_{13} - x_3 x_{12}) + \mu\left((x_{12})^2 + (x_{13})^2\right) \qquad (\lambda \neq 0) \tag{48}$$

genau die gegen Δ invarianten, nichtausgearteten quadratischen Formen auf dem Tangentialraum von $I_{l,m}$ in o sind, während für andere Wertepaare von l und m überhaupt keine derartigen quadratischen Formen existieren. Es ist dabei zweckmäßig, zunächst den Nachweis für die letztere Behauptung zu erbringen.

Dazu nehmen wir einmal an,

$$\left\{\sum_{\alpha,\beta=l+1}^{n} c_{(\alpha)(\beta)}\, x_\alpha x_\beta + 2\sum_{i=1}^{l}\sum_{\alpha,\beta=l+1}^{n} c_{(\alpha)(i\beta)}\, x_\alpha x_{i\beta} + \sum_{i,j=1}^{l}\sum_{\alpha,\beta=l+1}^{n} c_{(i\alpha)(j\beta)}\, x_{i\alpha} x_{j\beta}\right. \tag{49}$$
$$\left.(c_{(\alpha)(\beta)} = c_{(\beta)(\alpha)},\ c_{(\alpha)(i\beta)} = c_{(i\beta)(\alpha)},\ c_{(i\alpha)(j\beta)} = c_{(j\beta)(i\alpha)})\right.$$

sei irgendeine nichtausgeartete und gegenüber allen Transformationen (46) invariante quadratische Form der x_α und $x_{i\alpha}$. Dann ist diese quadratische Form auch um so mehr gegen die Transformationen (47) invariant. Daraus folgt aber durch Einsetzen mit nachfolgendem Koeffizientenvergleich:

$$c_{(\alpha)(\beta)} = 0 \quad \text{und} \quad c_{(\alpha)(i\beta)}\, a_j + c_{(\beta)(j\alpha)}\, a_i = 0.$$
$$(i, j = 1, \ldots, l;\ \alpha, \beta = l+1, \ldots, n).$$

Wäre nun $l>1$, so ergibt die zweite Gleichung weiter $c_{(\alpha)(i\beta)}=0$ $(i=1, \ldots, l;$ $\alpha, \beta = l+1, \ldots, n)$ (die a_i sind beliebig wählbar!), so daß sich (49) auf $\sum_{i,j=1}^{l}\sum_{\alpha,\beta=l+1}^{n} c_{(i\alpha)(j\beta)}\, x_{i\alpha} x_{j\beta}$ reduziert. Dies steht aber mit der Voraussetzung im Widerspruch, daß unsere quadratische Form nichtausgeartet sein sollte. Infolgedessen ist notwendig $l=1$ sowie $m>1$, und (49) besitzt die Gestalt:

$$2\sum_{2\leq\alpha<\beta\leq n} c_{(\alpha)(1\beta)}(x_\alpha x_{1\beta} - x_\beta x_{1\alpha}) + \sum_{\alpha,\beta=2}^{n} c_{(1\alpha)(1\beta)}\, x_{1\alpha} x_{1\beta}. \tag{50}$$

[50]) Hierbei haben die Vektorfunktionen $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ die analoge Bedeutung wie auf S. 347, und die Vektorfunktion $\mathfrak{p}$ stellt den Ortsvektor eines beliebigen Punktes auf den Geraden von $I_{1,2}$ dar. Satz 8 enthält übrigens die schon bewiesene Tatsache, daß es keine gegen $SB(n)$ invariante Riemannsche Metrik in $I_{l,m}$ gibt.

Wäre jetzt $m \geqq 3$, so müßte wegen der Invarianz von (50) gegen die durch geeignete Spezialisierung der Koeffizienten in (46) erhaltene Transformation $x'_{\alpha_0} = x_{\beta_0}$, $x'_{1\alpha_0} = x_{1\beta_0}$, $x'_{\beta_0} = x_{\alpha_0}$, $x'_{1\beta_0} = x_{1\alpha_0}$, $x'_{\gamma_0} = -x_{\gamma_0}$, $x'_{1\gamma_0} = -x_{1\gamma_0}$, $x'_{\delta} = x_{\delta}$, $x'_{1\delta} = x_{1\delta}$ ($\alpha_0 < \beta_0$, $\gamma_0 \neq \alpha_0$, $\gamma_0 \neq \beta_0$, δ durchläuft alle von den speziellen Indizes $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ verschiedenen Indizes zwischen 2 und n) $c_{(\alpha_0)(1\beta_0)} = 0$ gelten. Da aber hierbei das Indexpaar α_0, β_0 bis auf die Einschränkung $2 \leqq \alpha_0 < \beta_0 \leqq n$ beliebig gewählt werden kann, reduziert sich (50) auf $\sum_{\alpha,\beta=2}^{n} c_{(1\alpha)(1\beta)}\, x_{1\alpha}\, x_{1\beta}$, was wieder wie vorhin unmöglich ist. Also gilt in der Tat $l = 1$ sowie $m = 2$, und unsere quadratische Form lautet:

$$(51) \qquad 2\, c_{(2)(13)} (x_2\, x_{13} - x_3\, x_{12}) + \sum_{\alpha,\beta=2}^{3} c_{(1\alpha)(1\beta)}\, x_{1\alpha}\, x_{1\beta}.$$

Jetzt lehrt einfaches Nachrechnen, daß sich der erste Summand von (51) bei allen Transformationen (46) nicht ändert. Da dies aber auch für die ganze quadratische Form (51) zutreffen muß, folgt dasselbe für den zweiten Summanden von (51), der infolgedessen auf Grund der in Abschnitt 2 durchgeführten Betrachtungen die Gestalt $\mu\,((x_{12})^2 + (x_{13})^2)$ besitzt. Berücksichtigt man nun noch, daß wegen des Nichtausgeartetseins von (51) $c_{(2)(13)} \neq 0$ gilt, so findet man schließlich für unsere quadratische Form den (tatsächlich eine nichtausgeartete, gegen Δ invariante quadratische Form darstellenden) Ausdruck (48), womit der Beweis von Satz 8 beendet ist. q.e.d.

Der Beweis von Satz 8 liefert nach leichter Abänderung zusätzlich die Tatsache, *daß es keine gegen die Gruppe $B(n)$ aller eigentlichen und uneigentlichen Bewegungen des A_n invariante, nichtausgeartete quadratische Differentialform in $I_{l,m}$ geben kann.* Außerdem soll noch erwähnt werden, daß die Koeffizientendeterminanten aller Elemente (46) der linearen Isotropiegruppe von $I_{l,m}$ bezüglich $SB(n)$ vom Betrag 1 sind; dasselbe gilt auch für die lineare Isotropiegruppe von $I_{l,m}$ bezüglich $B(n)$. *Aus diesem Grunde existieren gegen $B(n)$ invariante Volumelemente von $I_{l,m}$, welche sich alle in der Form:*

$$dV = \lambda \left(\left(\bigwedge_{\alpha=l+1}^{n} \langle e_\alpha\, d\mathfrak{p} \rangle \right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{l} \bigwedge_{\alpha=l+1}^{n} \langle e_\alpha\, de_i \rangle \right) \right) \qquad (\lambda = \text{const} \neq 0)$$

angeben lassen[51]).

Literatur

[1] Whitney, H.: Differentiable manifolds. Ann. Math. **37**, 645–680 (1936).

[2] Teleman, C.: Sur les variétés de Grassmann. Bull. math. Soc. sci. math. phys. Rép. Popul. Roumaine 2 (50), 203–224 (1958).

[3] Bourbaki, N.: Algèbre ch. III. Paris 1948.

[4] Boerner, H.: Darstellungen von Gruppen. Berlin 1955.

[5] Chern, S. S.: Topics in differential geometry (mimeogr. notes). Princeton: Inst. of Adv. Study 1951.

[51]) Vgl. Fußnote [50]). Diese Volumelemente spielen in der Integralgeometrie eine Rolle; man findet sie im Fall $l = 1$, $m = 2$ und $l = 2$, $m = 1$ bei [16], II (33) und (24).

[6] Eisenhart, L. P.: Riemannian geometry. Princeton 1949.
[7] Cartan, É.: Oeuvres complètes. I. Paris 1952.
[8] Nomizu, K.: Invariant affine connections on homogeneous spaces. Amer. J. Math. **76**, 33—65 (1954).
[9] Helgason, S.: On Riemannian curvature of homogeneous spaces. Proc. Amer. Math. Soc. **9**, 831—838 (1958).
[10] Pontrjagin, L.: Topological groups. Princeton 1946.
[11] Weyl, H.: Gruppentheorie und Quantenmechanik. Leipzig 1928.
[12] Ehresmann, C.: Sur la topologie de certains espaces homogènes. Ann. Math. **35**, 396—443 (1934).
[13] Kähler, E.: Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metrik. Hamb. Abh. **9**, 173—186 (1933).
[14] Chern, S. S.: Characteristic classes of Hermitian manifolds. Ann. Math. **47**, 85—121 (1946).
[15] Hodge, W. U. P., u. D. Pedoe: Methods of algebraic geometry. I. Cambridge 1953.
[16] Blaschke, W.: Vorlesungen über Integralgeometrie. II. Leipzig 1937.

Freiburg i. Br., Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 26. Oktober 1960)

Behrens, E.-A.
Math. Zeitschr. 76, 367–384 (1961)

Distributiv darstellbare Ringe. II

Von
Ernst-August Behrens

Als distributiv darstellbar wurde ein Artin-Ring $\mathfrak{R}$ mit Einselement in Behrens [1][1]) definiert, wenn es einen treuen $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{m}$ mit distributivem $\mathfrak{R}$-Untermodulverband $V(\mathfrak{m})$ gibt. Die dort in erster Linie für primäre Ringe begonnenen Untersuchungen sollen in dieser Abhandlung fortgesetzt werden. Bereits in Teil I erwies es sich als zweckmäßig, den Begriff der distributiven Darstellbarkeit primärer Ringe $\mathfrak{R}=K_d+\mathfrak{W}$ zu dem der distributiven und K-linearen Darstellbarkeit zu verschärfen, indem man verlangt, daß $\mathfrak{m}$ ein $\mathfrak{R}$-Links-, K-Rechtsmodul ist. Dazu werden wir in §1, Satz 1 sehen, daß jeder $\mathfrak{R}$-Untermodul eines $\mathfrak{R}$-K-Moduls $\mathfrak{m}$ ein K-Rechtsmodul ist, falls der $\mathfrak{R}$-Untermodulverband $V(\mathfrak{m})$ distributiv ist. Dies gilt sogar für nicht notwendig mehr primäre, distributiv darstellbare Artin-Ringe $\mathfrak{R}$ mit Einselement, wenn K ein im Zentralisator des $\mathfrak{R}$-Moduls $\mathfrak{m}$ enthaltener Ring ist. Im folgenden sei unter einem distributiv darstellbaren Ring $\mathfrak{R}$ stets ein distributiv und für einen geeigneten Ring K auch K-linear darstellbarer Ring verstanden.

Ein distributiver $\mathfrak{R}$-K-Modul $\mathfrak{m}$ ist zwar im allgemeinen nicht eindeutig bis auf $\mathfrak{R}$-Modulisomorphie durch die Ringe $\mathfrak{R}$ und K bestimmt, wohl aber sein Verband $V(\mathfrak{m})$ bis auf Verbandsisomorphie. Diese für primäre Ringe, bei denen ja $V(\mathfrak{m})$ eine Kette ist, bereits in Teil I enthaltene Erkenntnis wird in §1 aus einer Beschreibung des Verbandes $V(\mathfrak{m})$ innerhalb des Ringes $\mathfrak{R}$ abgeleitet werden.

Ein primärer distributiv darstellbarer Ring $\mathfrak{R}$ besitzt nach Teil I, Satz 3, genau ein minimales Ideal, nämlich $\mathfrak{W}^{e-1}$, wobei e der Exponent des Radikales $\mathfrak{W}$ von $\mathfrak{R}$ ist. Auch ein beliebiger distributiv darstellbarer Ring $\mathfrak{R}$ enthält nur wenige minimale Ideale, die in §2, Satz 5, innerhalb des Ringes $\mathfrak{R}$ beschrieben werden. Jedoch erläutert erst dessen Zusatz, daß diese minimalen Ideale eng mit der Struktur der von den verbindungsirreduziblen $\mathfrak{R}$-Untermoduln eines distributiven $\mathfrak{R}$-Moduls $\mathfrak{m}$ gebildeten Halbordnung zusammenhängen.

Jeder distributive $\mathfrak{R}$-K-Modul $\mathfrak{m}$ ist zyklisch, $\mathfrak{m}=\mathfrak{R}\,b$, und damit isomorph zu $\mathfrak{R}-(0:b)$, wobei das Linksideal $\mathfrak{l}=(0:b)$ einige, bereits in $\mathfrak{R}$ ausdrückbare charakteristische Eigenschaften besitzt. Die distributiv darstellbaren Ringe $\mathfrak{R}$ sind dann natürlich diejenigen, die ein Linksideal $\mathfrak{l}$ mit diesen Eigenschaften enthalten (Satz 6). Diese im Grunde selbstverständliche ringinterne Charakterisierung der distributiv darstellbaren Ringe wird wesentlich interessanter, wenn man $\mathfrak{l}$ innerhalb des Ringes $\mathfrak{R}$ und seiner Faktorringe

[1]) Im folgenden wird diese Arbeit als „Teil I" zitiert.

durch Maximaleigenschaften näher beschreibt. In §3, Satz 7, wird diese Aufgabe für beliebige Ringe auf das analoge Problem in primären Ringen zurückgeführt. Für primäre Ringe sind nun die zu distributiven $\mathfrak{R}$-K-Moduln $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ führenden Linksideale $\mathfrak{l}$ bereits aus Teil I, §2, näher bekannt. Damals mußten aber über die Linksideale in $\mathfrak{R}$ hinaus noch die ω-Untermoduln von $\mathfrak{R}$ herangezogen werden, wobei ω ein Element aus $\mathfrak{W}\setminus\mathfrak{W}^2$ mit bestimmten Eigenschaften ist. Die Existenz dieses ω ist zwar in jedem distributiv darstellbaren primären Ring gesichert, will man aber diese Ringe durch innere Eigenschaften charakterisieren, muß man die Existenz von ω in $\mathfrak{R}$ postulieren, wie in Teil I, am Ende von §2, näher ausgeführt worden ist. In §4, Satz 8, werden wir nun eine Beschreibung der zu distributiven $\mathfrak{R}$-K-Moduln $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ führenden Linksideale kennenlernen, in welcher nur Maximaleigenschaften von $\mathfrak{l}$ als Linksideal aber nicht mehr als ω-Modul auftreten. Dies erlaubt, zusammen mit Satz 7, eine durchsichtigere ringinterne Charakterisierung der distributiv darstellbaren Ringe anzugeben.

§ 1

$\mathfrak{R}$ sei im folgenden stets ein Artin-Ring mit Einselement, d.h. in $\mathfrak{R}$ sei die Minimalbedingung für Linksideale erfüllt. $\mathfrak{W}$ sei sein Radikal und e dessen Exponent. Die Struktur eines endlichen distributiven Verbandes V läßt sich bekanntlich (HERMES [6], §21, BIRKHOFF [5], X) erfassen durch die Halbordnungsrelation zwischen seinen verbindungsirreduziblen Elementen. Dabei heißt ein Verbandselement $\mathfrak{i}$ verbindungsirreduzibel, wenn es nicht die Verbindung $\mathfrak{a}_1\cup\mathfrak{a}_2$ zweier Verbandselemente $\mathfrak{a}_i$ mit $\mathfrak{a}_i<\mathfrak{i}$ ist. Diese Beschreibung des Verbandes V ist möglich, weil jedes seiner Elemente Verbindung von verbindungsirreduziblen ist und weiter ein verbindungsirreduzibles Element $\mathfrak{i}$ genau dann in einer Verbindung der Elemente $\mathfrak{a}_i$ aus V enthalten ist, wenn $\mathfrak{i}$ in mindestens einem der $\mathfrak{a}_i$ liegt. In unserem Falle ist V der Verband der $\mathfrak{R}$-Untermoduln eines $\mathfrak{R}$-Moduls $\mathfrak{m}$ mit der Inklusion als Halbordnungsrelation.

$\mathfrak{R}$ ist nach der Definition in Teil I distributiv darstellbar, wenn $\mathfrak{R}$ einen treuen $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{m}$ mit distributivem $\mathfrak{R}$-Untermodulverband $V(\mathfrak{m})$ besitzt. Für primäre Ringe erwies es sich als nützlich, den Begriff der distributiven und K-linearen Darstellbarkeit von $\mathfrak{R}$ durch die Forderung der Existenz eines treuen $\mathfrak{R}$-Links-, K-Rechtsmoduls $\mathfrak{m}$ mit distributivem $\mathfrak{R}$-Untermodulverband $V(\mathfrak{m})$ einzuführen. Der primäre Ring $\mathfrak{R}$ und der Körper K standen dabei in der Beziehung $\mathfrak{R}/\mathfrak{W}=K_d$ zueinander. Etwas allgemeiner gelte folgende

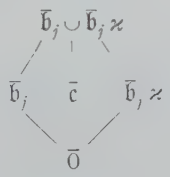
DEFINITION 1. *Die Ringe $\mathfrak{R}$ und K seien Artin-Ringe mit Einselementen. $\mathfrak{R}$ ist distributiv und K-linear darstellbar, wenn ein als $\mathfrak{R}$-Modul treuer und für $\mathfrak{R}$ und K unitaler $\mathfrak{R}$-Links-, K-Rechtsmodul $\mathfrak{m}$ mit distributivem $\mathfrak{R}$-Untermodulverband $V(\mathfrak{m})$ existiert. $\mathfrak{m}$ sei in diesem Falle als distributiver $\mathfrak{R}$-K-Modul bezeichnet.*

Der folgende Satz 1 besagt, daß man in dieser Definition statt des $\mathfrak{R}$-Untermodulverbandes auch den $\mathfrak{R}$-K-Untermodulverband von $\mathfrak{m}$ hätte nehmen können.

Satz 1. *Jeder $\mathfrak{R}$-Untermodul eines distributiven $\mathfrak{R}$-K-Moduls ist ebenfalls ein K-Rechtsmodul.*

Nimmt man daher insbesondere für K den ganzen $\mathfrak{R}$-Zentralisator $\mathfrak{Z}$ des distributiven $\mathfrak{R}$-Moduls $\mathfrak{m}$, so ist jeder $\mathfrak{R}$-Untermodul von $\mathfrak{m}$ vollinvariant im Sinne der Definition von Jacobson [7], IV. 2.2.

Beweis des Satzes 1. Angenommen, der $\mathfrak{R}$-Untermodul $\mathfrak{u}$ wäre kein K-Rechtsmodul, also $\mathfrak{u}K \supset \mathfrak{u}$. Da $\mathfrak{W}^0\mathfrak{u} = \mathfrak{u}$, $\mathfrak{W}^e\mathfrak{u} = 0$, existiert eine Zahl p zwischen 0 und $e-1$ mit $\mathfrak{W}^p\mathfrak{u}K \supset \mathfrak{W}^p\mathfrak{u}$, aber $\mathfrak{W}^{p+1}\mathfrak{u}K = \mathfrak{W}^{p+1}\mathfrak{u}$. Mit $\mathfrak{v} = \mathfrak{W}^{p+1}\mathfrak{u}$ ist auch $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} - \mathfrak{v}$ ein K-Rechtsmodul also ist $\mathfrak{W}^p\overline{\mathfrak{u}}K = \mathfrak{W}^p\mathfrak{u}K - \mathfrak{v}$ ein $\mathfrak{R}/\mathfrak{W}$-$K$-Modul. Die Distributivität der $\mathfrak{R}$-Untermodulverbände des Faktormoduls $\overline{\mathfrak{m}}$ und seines Untermoduls $\mathfrak{W}^p\overline{\mathfrak{u}}K$ folgt aus der von $V(\mathfrak{m})$. Auch für die Faktormoduln gilt $\mathfrak{W}^p\overline{\mathfrak{u}}K \supset \mathfrak{W}^p\overline{\mathfrak{u}}$, da sonst $\mathfrak{W}^p\overline{\mathfrak{u}}K = \mathfrak{W}^p\mathfrak{u} \cup \mathfrak{v} = \mathfrak{W}^p\mathfrak{u} \cup \mathfrak{W}^{p+1}\mathfrak{u} = \mathfrak{W}^p\mathfrak{u}$ wäre. Also existiert ein Element $\varkappa \in K$ mit $\mathfrak{W}^p\overline{\mathfrak{u}}\varkappa \subsetneqq \mathfrak{W}^p\overline{\mathfrak{u}}$. Setze $\overline{\mathfrak{d}} = \mathfrak{W}^p\overline{\mathfrak{u}}\varkappa \cap \mathfrak{W}^p\overline{\mathfrak{u}}$. Als $\mathfrak{R}/\mathfrak{W}$-Modul ist $\mathfrak{W}^p\overline{\mathfrak{u}}$ vollreduzibel, also eine $\mathfrak{R}$-direkte Summe $\overline{\mathfrak{d}} + \overline{\mathfrak{b}}_1 + \cdots + \overline{\mathfrak{b}}_s$ mit irreduziblen $\mathfrak{R}$-Moduln $\overline{\mathfrak{b}}_i$. Für mindestens ein $\overline{\mathfrak{b}}_i$ ist dabei $\overline{\mathfrak{b}}_j\varkappa \subsetneqq \overline{\mathfrak{b}}_j$. Die Irreduzibilität von $\overline{\mathfrak{b}}_j$ impliziert, daß der $\mathfrak{R}$-Homomorphismus $H\colon \overline{b}_j \to \overline{b}_j\varkappa$ ein Isomorphismus ist. Demnach enthält $\mathfrak{W}^p\overline{\mathfrak{u}}\,K$ zwei verschiedene, zueinander isomorphe $\mathfrak{R}$-Moduln $\overline{\mathfrak{b}}_j$ und $\overline{\mathfrak{b}}_j\varkappa$, deren Durchschnitt der Nullmodul $\overline{0}$ ist. Dies widerspricht aber der Distributivität des Verbandes der $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{W}^p\overline{\mathfrak{u}}K$, da dieser dann auch den $\mathfrak{R}$-Modul $\overline{\mathfrak{c}} = \{\overline{b}_j + \overline{b}_j H \mid \overline{b}_j \in \overline{\mathfrak{b}}_j\}$, sein Diagramm also die folgende Figur enthielte:



In jedem Artin-Ring $\mathfrak{R}$ mit 1 existieren bekanntlich orthogonale Idempotente $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$ mit $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_q = 1$ derart, daß der Ring als additive Gruppe die direkte Summe

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_q + \mathfrak{N} \tag{1}$$

ist, deren Summanden $\mathfrak{R}_s = \varepsilon_s\mathfrak{R}\varepsilon_s$ primäre Ringe sind und in der $\mathfrak{N}$ eine additive Untergruppe des Radikales $\mathfrak{W}$ des Ringes $\mathfrak{R}$ ist. Modulo $\mathfrak{W}$ betrachtet führt (1) auf die direkte Summendarstellung des halbeinfachen Ringes $\mathfrak{R}/\mathfrak{W}$ durch einfache Ringe $\overline{\mathfrak{R}}_s$ im ringtheoretischen Sinne. $\mathfrak{W}_s$ sei das Radikal von $\mathfrak{R}_s$ und e_s sein Exponent. Also existiert zu jedem s ein Körper $K^{(s)}$ mit

$$\overline{\mathfrak{R}}_s = \mathfrak{R}_s/\mathfrak{W}_s \cong K^{(s)}_{d_s}. \tag{2}$$

Falls $\mathfrak{R}$ primär, also $q = 1$ ist, besteht der Verband $V(\mathfrak{m})$ nach Teil I, §1, aus der Kette der $\mathfrak{W}_1^a\mathfrak{m}$, $a = 0, 1, \ldots, e-1$, so daß die verbandstheoretische Struktur von $V(\mathfrak{m})$ sich durch die Inklusionen in der Kette der Ideale $\mathfrak{W}_1^a$ erfassen läßt. Das nächste Ziel ist, auch für $q > 1$ eine Beschreibung von

$V(\mathfrak{m})$ innerhalb des Ringes $\mathfrak{R}$ anzugeben. Dabei legen es die Überlegungen in BEHRENS [2] nahe, folgendermaßen vorzugehen:

HILFSSATZ 1. *Sei*

$$0 = \mathfrak{m}_0 < \mathfrak{m}_1 < \cdots < \mathfrak{m}_l = \mathfrak{m} \tag{3}$$

eine maximale Kette von $\mathfrak{R}$-Untermoduln des distributiven $\mathfrak{R}-K$-Moduls $\mathfrak{m}$. Jeder der $\mathfrak{R}$-irreduziblen Faktormoduln $\mathfrak{m}_i - \mathfrak{m}_{i-1}$ stellt demnach genau einen der einfachen Ringe $\overline{\mathfrak{R}}_s$ aus (2) treu dar, etwa $\overline{\mathfrak{R}}_r$, und annulliert die anderen. Setze $r = f(i)$. Zu jedem $i = 1, \ldots, l$ existiert eine additive Untergruppe $\mathfrak{d}_i$ von $\mathfrak{m}$ mit $\varepsilon_r \mathfrak{d}_i = \mathfrak{d}_i$ derart, daß $\mathfrak{m}_i$ als Gruppe die direkte Summe von $\mathfrak{m}_{i-1}$ und $\mathfrak{d}_i$ ist. Setze $c_{ik} = 0$, wenn $\mathfrak{d}_i \cap \mathfrak{R}\mathfrak{d}_k = 0$ ist, und andernfalls $c_{ik} = 1$:

Behauptung.

$$\mathfrak{i}_k = \sum_{c_{ik}=1} \mathfrak{d}_i = \mathfrak{R}\mathfrak{d}_k, \qquad k = 1, \ldots, l, \tag{4}$$

sind die verbindungsirreduziblen $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{m}$. Bezüglich ihrer Inklusionen gilt:

$$\mathfrak{i}_j \subseteq \mathfrak{i}_k \quad \textit{ist äquivalent} \quad c_{jk} = 1. \tag{5}$$

BEWEIS. Die Existenz der obigen $\mathfrak{d}_i$ in $\mathfrak{m} = \mathfrak{d}_1 + \cdots + \mathfrak{d}_l$ folgt daraus, daß $\mathfrak{m}_i - \mathfrak{m}_{i-1}$ ein $K^{(r)}$-Rechtsmodul ist: Seien $b_1, \ldots, b_d$ eine $K^{(r)}$-Basis, wobei alle $b_m \in \mathfrak{m}_i$. Dann enthält $\mathfrak{m}_i$ die als Gruppe zu $\mathfrak{m}_i - \mathfrak{m}_{i-1}$ isomorphe Gruppe $b_1 K^{(r)} + \cdots + b_d K^{(r)} = \mathfrak{d}_i'$. Also ist $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}_{i-1} + \mathfrak{d}_i'$. Da ε_r den Modul $\mathfrak{m}_i - \mathfrak{m}_{i-1}$ elementweise reproduziert, ist $(1 - \varepsilon_r)\mathfrak{d}_i' \subseteq \mathfrak{m}_{i-1}$ und demnach $\mathfrak{d}_i = \varepsilon_r \mathfrak{d}_i'$ als Gruppe direkter Summand in $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}_{i-1} + \mathfrak{d}_i$ mit $\varepsilon_r \mathfrak{d}_i = \mathfrak{d}_i$. — Nach BEHRENS [3], S. 268—269, läßt sich jeder $\mathfrak{R}$-Untermodul $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{m}$ durch die als additive Gruppe direkte Summe

$$\mathfrak{u} = \sum_{i=1}^{q} \mathfrak{W}_i^{u_i} \mathfrak{m} \tag{6}$$

mit eindeutig bestimmten Exponenten u_i zwischen 0 und e_i ausdrücken. Analog seien die Zahlen v_i die Exponenten von $\mathfrak{v} \in V(\mathfrak{m})$. Dann gehören zu der Verbindung $\mathfrak{u} \cup \mathfrak{v}$ die Exponenten $s_i = \operatorname{Min}(u_i, v_i)$. Angenommen nun, $\mathfrak{i}_k = \mathfrak{R}\mathfrak{d}_k$ wäre reduzibel, also $\mathfrak{i}_k = \mathfrak{u} \cup \mathfrak{v}$, aber $\mathfrak{i}_k$ von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ verschieden. Mit der Bezeichnung $s = f(k)$ ist $\mathfrak{i}_k = \mathfrak{R}\mathfrak{d}_k \subseteq \mathfrak{u}$ äquivalent mit $\mathfrak{d}_k = \varepsilon_s \mathfrak{d}_k \subseteq \mathfrak{u}$, also auch mit $\mathfrak{d}_k \subseteq \varepsilon_s \mathfrak{u} = \mathfrak{W}_s^{u_s} \mathfrak{m}$, denn da $\mathfrak{R}_s$ ein primärer Ring ist, bilden die $\mathfrak{R}_s$-Untermoduln von $\mathfrak{m}$ die Kette der $\mathfrak{W}_s^b \mathfrak{m}$, $0 \leqq b \leqq e_s$. Analog für $\mathfrak{v}$ und für $\mathfrak{u} \cup \mathfrak{v}$. Aus $\mathfrak{i}_k = \mathfrak{u} \cup \mathfrak{v}$ folgt demnach $\mathfrak{d}_k \subseteq \mathfrak{W}_s^m \mathfrak{m}$, wobei $m = \min(u_s, v_s)$ ist. Aus $\mathfrak{i}_k \subsetneqq \mathfrak{u}$ und $\mathfrak{i}_k \subsetneqq \mathfrak{v}$ folgt andererseits $\mathfrak{d}_k \subsetneqq \mathfrak{W}_s^{u_s} \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{d}_k \subsetneqq \mathfrak{W}_s^{v_s} \mathfrak{m}$, q.e.a. — Dies impliziert $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{i}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{i}_i$. Sei x_i ein nicht in $\mathfrak{m}_{i-1}$ enthaltenes Element aus $\mathfrak{m}_i \cap \mathfrak{R}\mathfrak{d}_k$. Da auch der $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{R}x_i$ in diesem Durchschnitt liegt, tritt in dessen Darstellung als Verbindung von $\cup$-irreduziblen Elementen $\mathfrak{i}_i$ auf. Aus $\mathfrak{R}x_i \subseteq \mathfrak{R}\mathfrak{d}_k$ folgt dann $\mathfrak{d}_i \subseteq \mathfrak{R}\mathfrak{d}_k$. (Insbesondere ist $c_{ik} = 1$ äquivalent $\mathfrak{d}_i \subseteq \mathfrak{R}\mathfrak{d}_k$.) Demnach enthält schließlich $\mathfrak{R}\mathfrak{d}_k$ mit $m_{i-1} + d_i$ auch die Elemente $m_{i-1} \in \mathfrak{m}_{i-1}$ und $d_i \in \mathfrak{d}_i$; dies beweist die Summendarstellung (4) für $\mathfrak{i}_k$.

Eine andere Beschreibung der verbindungsirreduziblen Elemente des Verbandes $V(\mathfrak{m})$, die nicht von einer festen Kette (3) ausgeht, wurde in BEHRENS [3], Satz 4, abgeleitet. Wenn nämlich $\mathfrak{m}$ ein distributiver $\mathfrak{R}$-Modul ist, sind für die primären Ringe $\mathfrak{R}_s$ die unitalen $\mathfrak{R}_s$-Moduln $\mathfrak{R}_s\mathfrak{m} = \varepsilon_s\mathfrak{m}$ distributive $\mathfrak{R}_s$-Moduln, deren $\mathfrak{R}_s$-Untermodulverbände aus den Ketten der $\mathfrak{W}_s^a\mathfrak{m}$ bestehen. Die verbindungsirreduziblen $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{m}$ sind dann die Moduln $\mathfrak{R}\mathfrak{W}_s^a\mathfrak{m}$, wobei $1 \leqq s \leqq q$ und $0 \leqq a \leqq e_s - 1$. Dies beweist die erste Behauptung des folgenden Satzes 2, dessen zweite Behauptung die Inklusionen zwischen den verbindungsirreduziblen $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{m}$ und damit die verbandstheoretische Struktur des Verbandes $V(\mathfrak{m})$ innerhalb von $\mathfrak{R}$ beschreibt.

SATZ 2. *Voraussetzungen. 1. Der Artin-Ring $\mathfrak{R}$ mit Einselement sei als additive Gruppe in die primären Ringe $\mathfrak{R}_s$ und eine Untergruppe $\mathfrak{N}$ des Radikales von $\mathfrak{W}$ wie in* (1) *und* (2) *direkt zerlegt. $\mathfrak{W}_s$ sei das Radikal von $\mathfrak{R}_s$ und e_s sein Exponent, $s = 1, \ldots, q$. 2. $\mathfrak{m}$ sei ein distributiver $\mathfrak{R}$-K-Modul.*

Behauptungen. 1. Die verbindungsirreduziblen $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{m}$ sind die Moduln $\mathfrak{R}\mathfrak{W}_s^a\mathfrak{m}$, wobei $s = 1, \ldots, q$ und $a = 0, 1, \ldots, e_s - 1$ ist. 2. Die Aussagen

$$\mathfrak{R}\mathfrak{W}_s^a\mathfrak{m} \subseteqq \mathfrak{R}\mathfrak{W}_t^b\mathfrak{m} \tag{7}$$

und

$$\mathfrak{W}_s^{e_s-a-1}\mathfrak{R}\mathfrak{W}_t^b \neq 0 \tag{8}$$

sind miteinander äquivalent.

Ein Korollar hierzu ist der

SATZ 3. *Der Artin-Ring $\mathfrak{R}$ mit Einselement sei distributiv und K-linear darstellbar. Dann ist der $\mathfrak{R}$-Untermodulverband eines distributiven $\mathfrak{R}$-K-Moduls durch $\mathfrak{R}$ bis auf Verbandsisomorphie eindeutig bestimmt.*

BEWEIS DES SATZES 2. Mit den Bezeichnungen von Hilfssatz 1 gilt für die Moduln $\mathfrak{m}_j$ einer maximalen Kette (3) von $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{m}$

$$\varepsilon_s(\mathfrak{m}_j - \mathfrak{m}_{j-1}) \neq 0, \quad \text{wobei} \quad s = f(j). \tag{9}$$

Da $\mathfrak{R}_s$ primär, ist der $\mathfrak{R}_s$-Untermodul $\varepsilon_s\mathfrak{m}_j$ von $\varepsilon_s\mathfrak{m}$ gleich $\mathfrak{W}_s^a\mathfrak{m}$ für genau eine Zahl a zwischen 0 und $e_s - 1$. Mit dieser Zahl a gilt auch $\varepsilon_s\mathfrak{m}_{j-1} = \mathfrak{W}_s^{a+1}\mathfrak{m}$, weil der $\mathfrak{R}_s$-Modul (9) irreduzibel und $\neq 0$ ist. Wie in BEHRENS [3], Satz 1, gezeigt, tritt bei diesem Verfahren in einer maximalen Kette (3) von $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{m}$ jede Kombination (s, a) mit $1 \leqq s \leqq q$, $0 \leqq a \leqq e_s - 1$ genau einmal auf. Zu wie in (7) vorgegebenen Paaren (s, a) und (t, b) gibt es daher je eine Zahl j bzw. k zwischen 1 und l mit

$$\varepsilon_s\mathfrak{m}_j = \mathfrak{W}_s^a\mathfrak{m}, \quad \varepsilon_t\mathfrak{m}_k = \mathfrak{W}_t^b\mathfrak{m}, \quad \varepsilon_s\mathfrak{m}_{j-1} = \mathfrak{W}_s^{a+1}\mathfrak{m}, \quad \varepsilon_t\mathfrak{m}_{k-1} = \mathfrak{W}_t^{b+1}\mathfrak{m}. \tag{10}$$

Um hierauf den Hilfssatz 1 anwenden zu können, muß man die Gleichungen

$$\mathfrak{R}\mathfrak{W}_s^a\mathfrak{m} = \mathfrak{R}\mathfrak{d}_j = \mathfrak{i}_j \quad \text{und} \quad \mathfrak{R}\mathfrak{W}_t^b\mathfrak{m} = \mathfrak{R}\mathfrak{d}_k = \mathfrak{i}_k \tag{11}$$

beweisen. Aus (10), aus $\mathfrak{m}_j = \mathfrak{m}_{j-1} + \mathfrak{d}_j$ und aus $\varepsilon_s\mathfrak{d}_j = \mathfrak{d}_j$ folgt $\mathfrak{W}_s^a\mathfrak{m} = \varepsilon_s\mathfrak{m}_j = \varepsilon_s\mathfrak{m}_{j-1} + \mathfrak{d}_j = \mathfrak{W}_s^{a+1}\mathfrak{m} + \mathfrak{d}_j$, also $\mathfrak{W}_s^a\mathfrak{m} = \mathfrak{R}_s\mathfrak{d}_j$, denn die $\mathfrak{R}_s$-Untermoduln von

$\varepsilon_s \mathfrak{m}$ bilden eine Kette. Dies zieht wegen $\mathfrak{R}\,\mathfrak{R}_s \mathfrak{d}_j = \mathfrak{R}\,\mathfrak{d}_j$ nach Hilfssatz 1 die ersten Gleichungen in (11) nach sich. Analog beweist man die zweiten. — Natürlich gilt

$$\mathfrak{W}_s^{e-a-1}\,\mathfrak{d}_j \neq 0, \tag{12}$$

denn sonst wäre wegen (11), bereits $\mathfrak{W}_s^{e_s-1}\mathfrak{m}=0$ entgegen der Treue von $\mathfrak{m}$. Die in Satz 2 genannte Aussage (7) impliziert wegen (11) die Relation

$$\mathfrak{d}_j \subseteqq \mathfrak{R}\,\mathfrak{d}_k = \mathfrak{R}\,\mathfrak{W}_t^b\,\mathfrak{m}, \tag{13}$$

also wegen (12) die Behauptung (8) des Satzes 2.

Sei nun umgekehrt (8) erfüllt. Für genau ein k ist dann $\mathfrak{u} = \mathfrak{W}_s^{e_s-a-1}\mathfrak{R}\,\mathfrak{W}_t^b\mathfrak{m} = \mathfrak{W}_s^{e_s-a-1}\mathfrak{i}_k = \mathfrak{W}_s^{e_s-a-1}\mathfrak{R}\,\mathfrak{d}_k$ ein von 0 verschiedener, in $\varepsilon_s\mathfrak{R}\,\mathfrak{d}_k$ enthaltener $\mathfrak{R}_s$-Untermodul von $\varepsilon_s\mathfrak{m}$. Hierbei ist $\varepsilon_s\mathfrak{R}\,\mathfrak{d}_k = \mathfrak{W}_s^p\mathfrak{m}$ für einen geeigneten Exponenten p zwischen 0 und e_s-1. Aus $\mathfrak{u}\neq 0$ folgt, daß $\mathfrak{W}_s^{e_s-a-1}\mathfrak{W}_s^p\mathfrak{m}\neq 0$, also wegen, $\mathfrak{W}_s^{e_s}=0$ die Ungleichung $e_s-a-1+p\leqq e_s-1$ und damit $p\leqq a$ gilt. Die damit bewiesene Inklusion $\mathfrak{W}_s^a\mathfrak{m}\subseteqq\mathfrak{W}_s^p\mathfrak{m}=\varepsilon_s\mathfrak{R}\,\mathfrak{d}_k$ zieht wegen $\varepsilon_s\mathfrak{d}_k=\mathfrak{d}_k$ nach sich $\mathfrak{R}\,\mathfrak{W}_s^a\mathfrak{m}\subseteqq\mathfrak{R}\,\mathfrak{d}_k\subseteqq\mathfrak{R}\,\mathfrak{W}_t^b\mathfrak{m}$, also (7). Q.e.d.

Die Relationen (8) haben etwas mit der direkten Zerlegung von $\mathfrak{R}$ in zweiseitige Ideale mit Hilfe von Blöcken zu tun. (ARTIN, NESBITT, THRALL [*1*], IX.6).

§ 2

Ein primärer, distributiv und K-linear darstellbarer Ring besitzt nur ein einziges minimales Ideal, nämlich $\mathfrak{W}^{e-1}$, wie in Teil I ,Satz 3, bewiesen wurde. Auch ein beliebiger distributiv und K-linear darstellbarer Artin-Ring enthält nur wenige Ideale, nämlich die im folgenden Satz 5 genannten.

Wieder sei $\mathfrak{R}$ durch primäre Ringe $\mathfrak{R}_i$ und eine additive Gruppe $\mathfrak{N}_i$ aus dem Radikal $\mathfrak{W}$ in der Form

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_q + \mathfrak{N} \tag{1}$$

dargestellt, wobei

$$\mathfrak{R}_i = \varepsilon_i\mathfrak{R}\,\varepsilon_i, \qquad \mathfrak{N} = \sum_{i\neq k}\varepsilon_i\,\mathfrak{R}\,\varepsilon_k, \qquad \varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_q = 1, \varepsilon_i$$

orthogonale Idempotente sind. Mit $\mathfrak{W}_i$ sei das Radikal des Ringes $\mathfrak{R}_i$ bezeichnet, und e_i sei sein Exponent.

Die Aufstellung der minimalen Ideale in $\mathfrak{R}$ wird vorbereitet durch den

SATZ 4. *$\mathfrak{m}$ sei ein distributiver $\mathfrak{R}$-K-Modul, $\mathfrak{M}$ ein minimales Ideal in $\mathfrak{R}$, dann ist $\mathfrak{M}\mathfrak{m}$ ein minimaler $\mathfrak{R}$-Untermodul von $\mathfrak{m}$, und es existiert genau ein ε_i unter den $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$, für welches $\varepsilon_i\mathfrak{M}=\mathfrak{M}$ ist.*

BEWEIS. $\mathfrak{W}\mathfrak{M}=0$ weil sonst $\mathfrak{M}=\mathfrak{W}\mathfrak{M}=\mathfrak{W}^2\mathfrak{M}=\cdots=0$ wäre. Also ist $\mathfrak{M}\mathfrak{m}$ ein $\mathfrak{R}/\mathfrak{W}$-Modul, also voll reduzibel. Angenommen $\mathfrak{M}\mathfrak{m}$ wäre reduzibel. Dann ist $\mathfrak{M}\mathfrak{m}=\mathfrak{u}+\mathfrak{v}+\cdots$, wobei $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ irreduzible $\mathfrak{R}$-Moduln sind und die Summe als $\mathfrak{R}$-Modul direkt ist. $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ können nicht zueinander $\mathfrak{R}$-isomorph sein, weil dies, wie im Beweis von Satz 1 erläutert wurde, der Distributivität von $V(\mathfrak{m})$ widerspräche. Sei etwa $\varepsilon_1\mathfrak{u}=\mathfrak{u}$, $\varepsilon_2\mathfrak{v}=\mathfrak{v}$. Auch $\varepsilon_1\mathfrak{M}$ ist Ideal in $\mathfrak{R}$,

denn jedes Element $\varrho \in \mathfrak{R}$ läßt sich nach (1) in der Form $\varrho = \sum \varepsilon_i \varrho \varepsilon_i + \nu$, $\nu \in \mathfrak{W}$ schreiben, also ist $\varrho \varepsilon_1 \mathfrak{M} = \varepsilon_1 \varrho \varepsilon_1 \mathfrak{M}$, da $\mathfrak{W}\mathfrak{M} = 0$. Das Ideal $\varepsilon_1 \mathfrak{M}$ ist von 0 verschieden, weil $\mathfrak{u} = \varepsilon_1 \mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{m}$. Daher ist $\varepsilon_1 \mathfrak{M} = \mathfrak{M}$. Dies widerspricht aber $\varepsilon_2 \mathfrak{v} = \mathfrak{v} \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{m} = \varepsilon_1 \mathfrak{M}$. Schließlich ist für $j \neq 1$ das Produkt $\varepsilon_j \mathfrak{M} = \varepsilon_j \varepsilon_1 \mathfrak{M} = 0$.

Wenn $\mathfrak{m}$ ein distributiver $\mathfrak{R}$-K-Modul ist, dann sind nach Satz 1 alle $\mathfrak{R}$-Untermoduln und damit auch alle Faktormoduln dieser Untermoduln von $\mathfrak{m}$ ebenfalls $\mathfrak{R}$-K-Moduln. Dies gilt insbesondere für die $\mathfrak{R}$-irreduziblen unter diesen Faktormoduln. Sei etwa $\bar{\mathfrak{u}}$ ein solcher Modul, also ein irreduzibler $\overline{\mathfrak{R}}_i$-Modul für passendes i. Die Elemente aus K induzieren dann $\overline{\mathfrak{R}}_i$-Endomorphismen von $\bar{\mathfrak{u}}$, also Elemente aus dem Zentralisator $K^{(i)}$ des $\overline{\mathfrak{R}}_i$-Mod $\bar{\mathfrak{u}}$

Satz 5. *Voraussetzung. Der Ring $\mathfrak{R}$ sei distributiv und K-linear darstellbar. Hierbei sei der Ring K so groß, daß er für alle $\mathfrak{R}$-irreduziblen Faktormoduln der $\mathfrak{R}$-Untermoduln eines distributiven $\mathfrak{R}$-K-Moduls $\mathfrak{m}$ deren volle Zentralisatoren $K^{(i)}$ induziert.*

Behauptung. Die Untermenge

$$\mathfrak{M}_{ik} = \{\tau \mid \tau \in \mathfrak{R},\ \varepsilon_i \tau \varepsilon_k = \tau,\ \mathfrak{W}_j \tau = 0 = \tau \mathfrak{W}_k\} \tag{2}$$

von $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann minimales Ideal in $\mathfrak{R}$, wenn $\mathfrak{M}_{ik} \neq 0$ ist und in $\mathfrak{R}$ die Beziehungen

$$(1 - \varepsilon_i)\, \mathfrak{R}\, \mathfrak{W}_i^{e_i - 1} = 0 = \mathfrak{W}_k^{e_k - 1}\, \mathfrak{R}\, (1 - \varepsilon_k) \tag{3}$$

gelten. — Jedes minimale Ideal aus $\mathfrak{R}$ hat die Gestalt (2) mit (3).

Zusatz. *Die Gln. (3) bedeuten für jeden distributiven $\mathfrak{R}$-K-Modul $\mathfrak{m}$, daß unter allen verbindungsirreduziblen $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{m}$ die Moduln $\mathfrak{R}\, \mathfrak{W}_i^{e_i - 1} \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{R} \varepsilon_k \mathfrak{m}$ minimal bzw. maximal sind*

Beweis des Zusatzes. Nach Satz 2 ist $\mathfrak{R}\, \mathfrak{W}_i^{e_i - 1} \mathfrak{m}$ genau dann minimal, wenn für alle $(s, a) \neq (i, e_i - 1)$ gilt $\mathfrak{W}_s^{e_s - a - 1}\, \mathfrak{R}\, \mathfrak{W}_i^{e_i \cdot 1} = 0$ oder, was auf dasselbe hinausläuft, wenn für alle $s \neq i$ gilt $0 = \mathfrak{W}_s^0\, \mathfrak{R}\, \mathfrak{W}_i^{e_i \cdot 1} = \varepsilon_s\, \mathfrak{R}\, \mathfrak{W}_i^{e_i - 1}$. Dies ist wegen $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_q = 1$ mit der ersten Gleichung in (3) äquivalent. Ähnlich ist $\mathfrak{R} \varepsilon_k \mathfrak{m} = \mathfrak{R}\, \mathfrak{W}_k^0 \mathfrak{m}$ gemäß Satz 2 genau dann maximal, wenn die zweite Gleichung in (3) erfüllt ist.

Beweis des Satzes 5. 1. $\mathfrak{M}$ sei ein minimales Ideal in $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{m}$ ein distributiver $\mathfrak{R}$-K-Modul. Nach Satz 4 ist $\mathfrak{M}\mathfrak{m}$ ein minimaler $\mathfrak{R}$-Modul. Für ihn existiert genau ein ε_i unter den $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$, für welches $\varepsilon_i \mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ ist. Dies zieht $\varepsilon_i \tau = \tau$ für alle $\tau \in \mathfrak{M}$ nach sich. Als $\mathfrak{R}_i$-Modul ist $\varepsilon_i \mathfrak{M}\mathfrak{m} = \mathfrak{W}_i^a \mathfrak{m}$, also $\mathfrak{M}\mathfrak{m} = \mathfrak{R}\mathfrak{M}\mathfrak{m} = \mathfrak{R}\varepsilon_i \mathfrak{M}\mathfrak{m} = \mathfrak{R}\, \mathfrak{W}_i^a \mathfrak{m}$. Da $\mathfrak{M}\mathfrak{m}$ minimaler $\mathfrak{R}$-Modul, also erst recht minimal unter den verbindungsirreduziblen $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{m}$ ist, ist $a = e_i - 1$ und, nach dem Zusatz, die erste Gleichung in (3) richtig. Ferner impliziert die Minimalität des Ideales $\mathfrak{M}$ die Gleichungen $0 = \mathfrak{W}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\mathfrak{W}$, also auch $\mathfrak{W}_i \tau = 0 = \tau \mathfrak{W}_k$ für alle $\tau \in \mathfrak{M}$. Durch den minimalen $\mathfrak{R}$-Untermodul $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{M}\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{m}$ sei nun eine maximale Kette

$$0 = \mathfrak{m}_0 < \mathfrak{m}_1 < \cdots < \mathfrak{m}_l = \mathfrak{m} \tag{4}$$

von $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{m}$ gelegt. Wegen $\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_q=1$ ist für mindestens ein ε_k das Produkt $\mathfrak{M}\varepsilon_k\neq 0$. Angenommen es wäre auch $\mathfrak{M}\varepsilon_p\neq 0$ für ein $p\neq k$. Dann existiert ein Zahlenpaar (u, v) mit

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathfrak{M}\,\varepsilon_k\,\mathfrak{m}_u\neq 0, & \mathfrak{M}\,\varepsilon_p\,\mathfrak{m}_v\neq 0 \\ \mathfrak{M}\,\varepsilon_k\,\mathfrak{m}_{u-1}=0, & \mathfrak{M}\,\varepsilon_p\,\mathfrak{m}_{v-1}=0. \end{cases}$$

Da $\mathfrak{m}_u-\mathfrak{m}_{u-1}$ und $\mathfrak{m}_v-\mathfrak{m}_{v-1}$ irreduzible $\mathfrak{R}$-Moduln sind, aber $\varepsilon_k\neq\varepsilon_p$ ist, ist $u\neq v$. Sei etwa $u<v$. Dann ist das minimale Ideal $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}\varepsilon_k\mathfrak{R}=\mathfrak{M}\varepsilon_p\mathfrak{R}$, also $0\neq\mathfrak{M}\varepsilon_k\mathfrak{m}_u=\mathfrak{M}\varepsilon_k\mathfrak{R}\mathfrak{m}_u=\mathfrak{M}\varepsilon_p\mathfrak{R}\mathfrak{m}_u\subseteqq\mathfrak{M}\varepsilon_p\mathfrak{R}\mathfrak{m}_{v-1}=\mathfrak{M}\varepsilon_p\mathfrak{m}_{v-1}=0$. Q.e.a. Dies beweist

$$(6)\qquad \mathfrak{M}\,\varepsilon_p=0 \quad \text{für} \quad p\neq k, \qquad \mathfrak{M}=\mathfrak{M}\,\varepsilon_k$$

und damit $\tau\varepsilon_k=\tau$ für alle $\tau\in\mathfrak{M}$. Nach (5) ist nun $\varepsilon_k\mathfrak{m}_u\neq 0$, also als $\mathfrak{R}_k$-Modul $0\neq\varepsilon_k\mathfrak{m}_u=\mathfrak{W}_k^a\mathfrak{m}$. Hierbei ist $a=0$, denn aus $0\neq\mathfrak{M}\varepsilon_k\mathfrak{m}_u=\mathfrak{M}\mathfrak{W}_k^a\mathfrak{m}$ folgt $\mathfrak{M}\mathfrak{W}_k^a\mathfrak{R}=\mathfrak{M}=\mathfrak{M}\varepsilon_k$, also $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}\mathfrak{W}_k^a$ und damit $a=0$, denn $\mathfrak{W}_k$ ist nilpotent. Die damit bewiesene Gleichung

$$(7)\qquad \varepsilon_k\,\mathfrak{m}_u=\varepsilon_k\,\mathfrak{m}$$

kann man zum Beweis der zweiten Gleichung in (3) heranziehen: Wie in Hilfssatz 1 seien die $\mathfrak{d}_j$-Untergruppen von $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{m}_j=\mathfrak{m}_{j-1}+\mathfrak{d}_j$, wobei $\mathfrak{d}_j$ von genau einem der Idempotente $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$ reproduziert und von den anderen annulliert wird. Wegen (7) ist $\varepsilon_k(\mathfrak{d}_{u+1}+\cdots+\mathfrak{d}_l)=0$. Nach Hilfssatz 1 ist $\mathfrak{i}_u=\mathfrak{R}\mathfrak{d}_u$ genau dann maximal unter den verbindungsirreduziblen $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{m}$, wenn $c_{u,u+1}=\cdots=c_{ul}=0$ ist. Angenommen es wäre $c_{ur}=1$ für ein $r>u$, also $\mathfrak{d}_u\cap\mathfrak{R}\mathfrak{d}_r\neq 0$. Genauer würde dann $\mathfrak{d}_u\subseteqq\mathfrak{R}\mathfrak{d}_r$ gelten, wie in § 1 beim Beweis des Hilfsatzes 1 gezeigt wurde. Wegen (5) wäre $0\neq\mathfrak{M}\varepsilon_k\mathfrak{d}_u=\mathfrak{M}\mathfrak{d}_u\subseteqq\mathfrak{M}\mathfrak{R}\mathfrak{d}_r=\mathfrak{M}\varepsilon_k\mathfrak{d}_r$, also $\varepsilon_k\mathfrak{d}_r\neq 0$, q.e.a. Dies impliziert die Maximalität von $\mathfrak{i}_u=\mathfrak{R}\mathfrak{d}_u$ unter den verbindungsirreduziblen $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{m}$. Wegen (5) und (7) ist $\mathfrak{d}_u=\varepsilon_k\mathfrak{d}_u\subseteqq\varepsilon_k\mathfrak{m}$, also $\mathfrak{R}\mathfrak{d}_u=\mathfrak{R}\varepsilon_k\mathfrak{m}$, denn auch $\mathfrak{R}\varepsilon_k\mathfrak{m}$ ist verbindungsirreduzibel. Dies zieht auf Grund des bereits bewiesenen Zusatzes die zweite Gleichung in (3) nach sich.

2. Zum Beweis der Umkehrung sei $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_{ik}\neq 0$ eine Menge (2). Außerdem gelte (3) für den Ring $\mathfrak{R}$. Daß $\mathfrak{M}$ ein Linksideal ist, kann man folgendermaßen zeigen: Jedes Element $\varrho\in\mathfrak{R}$ läßt sich nach (1) in der Form

$$(8)\qquad \varrho=\sum_{1\leqq j\leqq q}\varepsilon_j\varrho_j+\nu, \qquad \nu\in\mathfrak{N}=\sum_{j\neq k}\varepsilon_j\mathfrak{R}\,\varepsilon_k,$$

schreiben. Wegen $\mathfrak{M}=\varepsilon_i\mathfrak{M}$ ist

$$(9)\qquad \varrho\,\mathfrak{M}=\varepsilon_i\varrho\,\varepsilon_i\mathfrak{M}+\nu\,\mathfrak{M}.$$

Sei $\mathfrak{m}$ ein distributiver $\mathfrak{R}$-K-Modul, wie in der Voraussetzung. Sein $\mathfrak{R}_i$-Untermodul $\varepsilon_i\mathfrak{M}\mathfrak{m}=\mathfrak{M}\mathfrak{m}$ ist gleich $\mathfrak{W}_i^a\mathfrak{m}$ mit $a=e_i-1$, da $\mathfrak{W}_i\mathfrak{m}=0$. Wäre nun in (9) das Produkt $\nu\mathfrak{M}\neq 0$, dann wäre, wegen der Treue des $\mathfrak{R}$-Moduls $\mathfrak{m}$,

$$0\neq\sum_{j,\,j\neq i}\varepsilon_j\mathfrak{R}\,\varepsilon_i\mathfrak{M}\,\mathfrak{m}=(1-\varepsilon_i)\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{W}_i^{a-1}\,\mathfrak{m},$$

im Widerspruch zur ersten Gleichung in (3). Gemäß (9) ist daher $\mathfrak{M}$ sicher dann Linksideal in $\mathfrak{R}$, wenn es ein $\mathfrak{R}_i$-Linksmodul ist. Letzteres folgt für $\varrho \in \mathfrak{R}_i$, $\tau \in \mathfrak{M}$ aus (2), das heißt aus den Gleichungen $\varepsilon_i \tau \varepsilon_k = \tau$, $\mathfrak{W}_i \tau = 0 = \tau \mathfrak{W}_k$, da nämlich $\varepsilon_i \varrho \tau \varepsilon_k = \varepsilon_i \varrho \varepsilon_i \tau \varepsilon_k = \varrho \tau$, $\mathfrak{W}_i \varrho \tau \subseteq \mathfrak{W}_i \tau = 0 = \varrho \tau \mathfrak{W}_k$. — Da $\mathfrak{M}$ Linksideal ist, ist $\mathfrak{M}\mathfrak{m} = \mathfrak{R}\mathfrak{M}\mathfrak{m} = \mathfrak{R}\mathfrak{W}_i^{e-1}\mathfrak{m}$ nach (3) und Satz 2 ein minimaler $\mathfrak{R}$-Modul. Durch $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{M}\mathfrak{m}$ sei eine maximale Kette (4) von $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{m}$ gelegt. In ihr existiert ein Index u mit $\varepsilon_k \mathfrak{m}_u = \varepsilon_k \mathfrak{m}$, aber $\mathfrak{W}_k \varepsilon_k \mathfrak{m} = \mathfrak{W}_k \varepsilon_k \mathfrak{m}_u = \varepsilon_k \mathfrak{m}_{u-1}$. Für dieses u gelten $\mathfrak{M}\mathfrak{m} = \mathfrak{M}\varepsilon_k \mathfrak{m} = \mathfrak{M}\mathfrak{m}_u$ und $0 = \mathfrak{M}\mathfrak{W}_k \mathfrak{m} = \mathfrak{M}\mathfrak{W}_k \mathfrak{m}_u = \mathfrak{M}\mathfrak{m}_{u-1}$. Führt man wieder die $\mathfrak{d}_j$ mit $\mathfrak{m}_j = \mathfrak{m}_{j-1} + \mathfrak{d}_j$ aus Hilfssatz 1 ein, so annulliert wegen $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\varepsilon_k$, $\varepsilon_k \mathfrak{m} = \varepsilon_k \mathfrak{m}_u$, $\mathfrak{M}\mathfrak{m}_{u-1} = 0$, die Menge $\mathfrak{M}$ alle $\mathfrak{m}_j$ außer $\mathfrak{d}_u$. Da $\mathfrak{R}\mathfrak{m}_{u-1} = \mathfrak{m}_{u-1}$, gilt auch $\mathfrak{M}\mathfrak{R}\mathfrak{d}_j = 0$ für alle $j < u$. Dies ist auch für alle $j > u$ richtig. Beweis: Auf Grund des Zusatzes zu Satz 5 bedeutet die zweite Gleichung in (3), daß $\mathfrak{R}\varepsilon_k \mathfrak{m}_u = \mathfrak{R}\varepsilon_k \mathfrak{m}$ maximal unter den verbindungsirreduziblen $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{m}$ ist, also nach Hilfssatz 1 die Gleichungen $c_{u,u+1} = \cdots = c_{ul} = 0$. Daher tritt für $j > u$, ebenfalls nach Hilfssatz 1, $\mathfrak{d}_u$ nicht unter den $\mathfrak{d}_h$ in $\mathfrak{R}\mathfrak{d}_j = \sum_{c_{hj}=1} \mathfrak{d}_h$ auf. Wegen $\mathfrak{M}\mathfrak{d}_j = 0$ für $j \neq u$, ist $\mathfrak{M}\mathfrak{R}\mathfrak{d}_j = \sum \mathfrak{M}\mathfrak{d}_h = 0$. Folglich ist, wie behauptet, $\mathfrak{M}\mathfrak{R}\mathfrak{d}_j = 0$ für alle $j \neq u$. Hieraus läßt sich ableiten, daß $\mathfrak{M}$ ein Rechtsideal ist. Beweis: Zunächst gilt $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\varepsilon_k$, also $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\mathfrak{R}_k + \sum \mathfrak{M}\mathfrak{R}\varepsilon_p$, $p \neq k$. Daß hierbei $\mathfrak{M}$ ein $\mathfrak{R}_k$-Rechtsmodul ist, zeigt man ebenso, wie oben $\mathfrak{R}_i \mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ bewiesen wurde, nach Vertauschung der linken Seite mit der rechten. Wäre nun $\mathfrak{M}\mathfrak{R}\varepsilon_p \neq 0$, dann wäre, wegen der Treue von $\mathfrak{m}$, $0 \neq \mathfrak{M}\mathfrak{R}\varepsilon_p \mathfrak{m} = \mathfrak{M}\mathfrak{R}\varepsilon_p \sum \mathfrak{d}_j = \mathfrak{M}\mathfrak{R}\varepsilon_p \mathfrak{d}_u = \mathfrak{M}\mathfrak{R}\varepsilon_p \varepsilon_k \mathfrak{d}_u = 0$, q.e.a. — Wegen $\mathfrak{M}\mathfrak{d}_j = 0$ für $j \neq u$, wegen $\mathfrak{M}\mathfrak{d}_u = \mathfrak{M}\mathfrak{m} = \mathfrak{M}\mathfrak{W}_i^{e_i - 1}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1$ und wegen der Treue von $\mathfrak{m}$ induzieren die Elemente des Ideales $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{ik}$ lauter K-lineare Abbildungen von $\mathfrak{m}_u - \mathfrak{m}_{u-1}$ in $\mathfrak{m}_1$ derart, daß nur das Nullelement von $\mathfrak{M}$ die Nullabbildung ergibt. Nach der Voraussetzung von Satz 5 ist der Ring K von $\mathfrak{R}$-Endomorphismen von $\mathfrak{m}$ so groß, daß er insbesondere für $\mathfrak{m}_u - \mathfrak{m}_{u-1}$ und für $\mathfrak{m}_1$ deren volle Zentralisatoren $K^{(k)}$ bzw. $K^{(i)}$ induziert. Hierauf lassen sich nun das Lemma aus JACOBSON [7], II.2 und, etwas modifiziert, die darauf folgenden, bei JACOBSON zum Beweis seines Theorems II.2.1 führenden Überlegungen anwenden. Sie ergeben, daß $\mathfrak{M}$ die dichte Gruppe K-linearer Abbildungen von $\mathfrak{m}_u - \mathfrak{m}_{u-1}$ in $\mathfrak{m}_1$ induziert. Wäre nun $\mathfrak{M}$ nicht minimales Ideal, würde also ein Ideal $0 \neq \mathfrak{M}' < \mathfrak{M}$ existieren, dann ließe sich das obige Resultat von JACOBSON auch auf $\mathfrak{M}'$ anwenden, also wäre $\mathfrak{M}'$ ebenfalls die dichte Gruppe, also wäre doch $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}$. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Der Satz 5 und sein Zusatz zeigen, daß bei genügend großem K die minimalen Ideale eines distributiv und K-linear darstellbaren Ringes $\mathfrak{R}$ sehr eng mit der Halbordnungsstruktur der verbindungsirreduziblen $\mathfrak{R}$-Untermoduln eines distributiven $\mathfrak{R}$-K-Moduls $\mathfrak{m}$ zusammenhängen; wenn sich diese minimalen Ideale auch bereits durch den Satz 5 (ohne den Zusatz) innerhalb des Ringes $\mathfrak{R}$ beschreiben lassen.

Für einen primären Ring $\mathfrak{R}$, also für $q = 1$, $\varepsilon_1 = 1$, sind in Satz 5 die Gln. (3) trivial erfüllt, also ist $\mathfrak{M}_{11}$ das einzige minimale Ideal in $\mathfrak{R}$. Da $\mathfrak{W}^{e-1}$ den

Gleichungen $\mathfrak{W}\mathfrak{W}^{e-1}=0=\mathfrak{W}^{e-1}\mathfrak{W}$ genügt und ein Ideal ist, ist $\mathfrak{M}_{11}=\mathfrak{W}^{e-1}$, ein Resultat, das bereits in Teil I, Satz 3, auf anderem Wege hergeleitet wurde.

Da $\mathfrak{M}_{ii}=\mathfrak{W}_i^{e_i-1}$ das minimale Ideal des primären Ringes $\mathfrak{R}_i$ ist, sind die $\mathfrak{M}_{ii}$ stets ungleich 0. Sie brauchen aber keine Ideale, die Gln. (3) also in $\mathfrak{R}$ nicht erfüllt zu sein, wie das folgende Beispiel 1 zeigen wird. Andererseits können für ein Paar (i, k), $i \neq k$, die Gln. (3) gelten, ohne daß $\mathfrak{M}_{ik} \neq 0$ ist, z.B. dann, wenn $\mathfrak{R}$ die direkte Summe der Ringe $\mathfrak{R}_i$ ist.

BEISPIEL 1. Der Ring $\mathfrak{R}$ bestehe aus den Dreiecksmatrizen

$$\tau=\begin{pmatrix} p_1 & r_{12} & r_{13} & p_{14} & p_{15} & r_{16} \\ & q_2 & q_{23} & r_{24} & r_{25} & q_{26} \\ & & q_2 & r_{34} & r_{35} & q_{36} \\ & & & p_1 & p_{45} & r_{46} \\ & 0 & & & p_1 & r_{56} \\ & & & & & q_2 \end{pmatrix},$$

deren Matrixelemente p, q, r einem kommutativen Körper K entnommen seien. In $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2+\mathfrak{N}$ besteht der primäre Ring $\mathfrak{R}_1$ aus denjenigen τ, für die alle q und r gleich 0 sind, der Ring $\mathfrak{R}_2$ aus denjenigen τ, für die alle p und r gleich 0 sind, während der K-Modul $\mathfrak{N}$ gerade diejenigen Matrizen τ enthält, für die alle p und q gleich 0 sind. Bezeichnet man die bekannten Matrixeinheiten durch C_{ik}, $1 \leqq i, k \leqq 6$, dann sind $\mathfrak{M}_{11}=C_{14}K$ und $\mathfrak{M}_{22}=C_{26}K$ keine Ideale n $\mathfrak{R}$, sondern $\mathfrak{M}_{12}=C_{16}K$ ist das einzige minimale Ideal in $\mathfrak{R}$.

Auf das Beispiel 1 werden wir noch später zurückkommen.

Dem Satz 5 kann man etwas mehr über die idealtheoretische Struktur eines distributiv und K-linear darstellbaren Ringes entnehmen, wenn man beachtet, daß jeder $\mathfrak{R}$-Untermodul $\mathfrak{u}$ eines distributiven $\mathfrak{R}$-K-Moduls $\mathfrak{m}$ und auch der dazugehörige Faktormodul $\mathfrak{m}-\mathfrak{u}$ ebenfalls wieder distributive $\mathfrak{R}$-Untermodulverbände besitzen und die Faktorringe $\mathfrak{R}/(0:\mathfrak{u})$ bzw. $\mathfrak{R}/(\mathfrak{u}:\mathfrak{m})$ treu darstellen. Wenn z.B. $\mathfrak{R}$ primär ist und $\mathfrak{u}=\mathfrak{W}^{e-k}\mathfrak{m}$ genommen wird, ist nach Teil I, Hilfssatz 3, $(\mathfrak{u}:\mathfrak{m})=(0:\mathfrak{W}^k)=\{\tau \mid \tau \in \mathfrak{R},\ \mathfrak{W}^k\tau=0\}=\mathfrak{A}_k$ innerhalb des Ringes $\mathfrak{R}$ beschreibbar. Der Satz 5 sagt dann etwas über die minimalen Ideale in $\mathfrak{R}/\mathfrak{A}_k$, also über die minimalen Oberideale von $\mathfrak{A}_k$ in $\mathfrak{R}$ aus.

§ 3

Eine rein ringtheoretische Charakterisierung der distributiv und K-linear darstellbaren Ringe läßt sich leicht angeben: Nach Teil I, Satz 2, ist jeder distributive $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{m}$ zyklisch, $\mathfrak{m}=\mathfrak{R}b$, also $\mathfrak{m}$ als $\mathfrak{R}$-Modul isomorph zu dem mit dem Linksideal $\mathfrak{l}=(0:b)$ gebildeten Faktormodul $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$. Dieser ist dann und nur dann treuer $\mathfrak{R}$-Modul, wenn (0) das einzige in $\mathfrak{l}$ enthaltene Ideal ist. Schreibt man wie in den beiden vorangehenden Paragraphen

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1+\cdots+\mathfrak{R}_q+\mathfrak{N}, \tag{1}$$

so ist nach Teil I, Satz 1, der Verband $V(\mathfrak{m})$ der $\mathfrak{R}$-Untermoduln eines treuen $\mathfrak{R}$-Moduls $\mathfrak{m}$ genau dann distributiv, wenn er die Länge $l=e_1+\cdots+e_q$ hat, dabei ist e_i der Exponent des Radikales $\mathfrak{W}_i$ des primären Ringes $\mathfrak{R}_i=\varepsilon_i\mathfrak{R}\varepsilon_i$. Dies sei notiert als

Satz 6. *Der in der Form* (1) *zerlegte Artin-Ring mit Einselement ist dann und nur dann distributiv und K-linear darstellbar, wenn* $\mathfrak{R}$ *ein Linksideal* $\mathfrak{l}$ *mit folgenden drei Eigenschaften besitzt: 1. Der* $\mathfrak{R}$*-Linksmodul* $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ *ist als* $\mathfrak{R}$*-K-Modul erklärbar, 2.* $(\mathfrak{l}:\mathfrak{R})=0$, *das heißt* $\mathfrak{l}$ *enthält nur* (0) *als Ideal, 3. die maximalen Ketten von Linksoberidealen von* $\mathfrak{l}$ *haben die Länge* $l=e_1+\cdots+e_q$.

Setzt man von vornherein voraus, daß $\mathfrak{R}$ nur die in der Behauptung des Satzes 5 genannten $\mathfrak{M}_{ik}\neq 0$ als minimale Ideale besitzt, so läßt sich die Forderung 2. des Satzes 6 dadurch nachprüfen, daß man untersucht, ob eines dieser $\mathfrak{M}_{ik}$ in $\mathfrak{l}$ enthalten ist.

Die zu distributiven $\mathfrak{R}-K$-Moduln $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ führenden Linksideale $\mathfrak{l}$ sind für primäre Ringe bereits in Teil I, §2 näher beschrieben worden. Die darauf beruhende, verhältnismäßig komplizierte ringinterne Charakterisierung der primären, distributiv darstellbaren Ringe wird im nächsten Paragraphen wesentlich vereinfacht werden. Das analoge Problem für nichtprimäre Artin-Ringe mit Einselement soll noch in diesem Paragraphen darauf zurückgeführt werden. Dabei spielt der aus der Zerlegung (1) des Ringes $\mathfrak{R}$ resultierende Unterring

$$\mathfrak{S}=\mathfrak{R}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{R}_q \tag{2}$$

eine Rolle. $\mathfrak{S}$ ist direkte Summe der primären Ringe $\mathfrak{R}_i$ im ringtheoretischen Sinne, weil die Idempotente ε_i orthogonal sind. In Teil I, Satz 12 wurde erkannt, daß ein $\mathfrak{R}$-K-Modul $\mathfrak{m}$ bereits dann distributiv ist, wenn er den Ring $\mathfrak{S}$ distributiv darstellt und als $\mathfrak{R}$-Modul treu ist.

$\mathfrak{m}$ sei nun ein distributiver $\mathfrak{R}$-K-Modul. Dann ist $\varepsilon_i\mathfrak{m}$ ein distributiver $\mathfrak{R}_i$-K-Modul, also $\varepsilon_i\mathfrak{m}=\mathfrak{R}_i b^{(i)}$ für ein erzeugendes Element $b^{(i)}$ des $\mathfrak{R}_i$-Moduls $\varepsilon_i\mathfrak{m}$, $i=1,\ldots,q$. Das Element $b=b^{(1)}+\cdots+b^{(q)}$ erzeugt den $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{R}b=\mathfrak{m}$, da $\mathfrak{R}b\geqq\sum\mathfrak{R}_i b^{(i)}=\sum\varepsilon_i\mathfrak{m}=\mathfrak{m}$. Demnach gelten

$$\mathfrak{m}\cong\mathfrak{R}-\mathfrak{l},\qquad \mathfrak{l}=(0:b)\quad\text{als }\mathfrak{R}\text{-Modul} \tag{3}$$

und

$$\varepsilon_i\mathfrak{m}\cong\mathfrak{R}_i-\mathfrak{l}_i,\qquad \mathfrak{l}_i=\{\tau\,|\,\tau\in\mathfrak{R}_i,\ \tau b^{(i)}=0\}\quad\text{als }\mathfrak{R}_i\text{-Moduln.} \tag{4}$$

Wegen $b^{(i)}=\varepsilon_i b$ ist

$$\mathfrak{l}=\{\tau\,|\,\tau\in\mathfrak{R}_i,\ \tau b=0\}=\mathfrak{l}\cap\mathfrak{R}_i. \tag{5}$$

Das in (3) definierte Linksideal $\mathfrak{l}$ hat also die Eigenschaft, daß für $i=1,\ldots,q$ die $\mathfrak{R}_i$-Moduln $\mathfrak{R}_i-(\mathfrak{l}\cap\mathfrak{R}_i)$ die Ringe $\mathfrak{R}_i$ distributiv darstellen. Durch Linksmultiplikation von (3) mit ε_i folgt $\varepsilon_i\mathfrak{m}\cong\varepsilon_i\mathfrak{R}-\varepsilon_i\mathfrak{l}$ als $\mathfrak{R}_i$-Modul. Dies gibt,

zusammen mit (4) einen $\mathfrak{R}_i$-Isomorphismus

$$H_i: \quad \mathfrak{R}_i - \mathfrak{l}_i \cong \varepsilon_i \mathfrak{R} - \varepsilon_i \mathfrak{l}, \tag{6}$$

der wegen $\mathfrak{R}_i \subseteqq \varepsilon_i \mathfrak{R}$ aus der Abbildung

$$H_i: \quad \varrho_i \bmod \mathfrak{l}_i \to \varrho_i \bmod \mathfrak{l} \tag{7}$$

besteht. Der Isomorphismus (6) führt auf $\varepsilon_i \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_i \cup \varepsilon_i \mathfrak{l}$, also wegen $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_q = 1$ auf

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{S} \cup \mathfrak{l}. \tag{8}$$

Mit $\mathfrak{m}$ sind auch $\varepsilon_i \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{R}_i - \mathfrak{l}_i$ Doppelmoduln mit K als einem Rechtsoperatorenbereich.

Die Umkehrung dieser Überlegungen wird den Beweis des folgenden Satzes vollenden.

SATZ 7. *Voraussetzungen.* $\mathfrak{R}$ *sei ein Artin-Ring mit Einselement und*

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_q + \mathfrak{N}, \tag{1}$$

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{R}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_q. \tag{2}$$

Behauptung. $\mathfrak{R}$ *ist dann und nur dann distributiv und K-linear darstellbar, wenn* $\mathfrak{R}$ *ein Linksideal* $\mathfrak{l}$ *mit folgenden Eigenschaften besitzt: 1. Der* $\mathfrak{R}$*-Modul* $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}$ *ist als* $\mathfrak{R}$*-K-Modul erklärbar. 2.* $\mathfrak{l}$ *enthält nur* 0 *als Ideal. 3.* $\mathfrak{R} = \mathfrak{S} \cup \mathfrak{l}$. *4.* $\mathfrak{R}_i - (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{R}_i)$ *stellt den primären Ring* $\mathfrak{R}_i$ *distributiv und K-linear dar,* $i = 1, \ldots, q$. *Falls das Linksideal* $\mathfrak{l}$ *die Forderungen 1. bis 4. erfüllt, ist* $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}$ *ein distributiver* $\mathfrak{R}$*-K-Modul.*

BEWEIS. Die Bedingungen 1. bis 4. seien für $\mathfrak{l}$ erfüllt. Dann ist $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}$ nach 1. $\mathfrak{R}$-K-Modul, der wegen 2. treu bezüglich $\mathfrak{R}$ ist. Zu zeigen bleibt nach Teil I, Sätze 11 und 12, daß die Moduln $\varepsilon_i(\mathfrak{R} - \mathfrak{l})$ die Ringe $\mathfrak{R}_i$ distributiv darstellen. Nach 4. haben die $\mathfrak{R}_i$-Moduln $\mathfrak{R}_i - (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{R}_i)$ diese Eigenschaft. Wegen $\mathfrak{R}_i = \varepsilon_i \mathfrak{R} \varepsilon_i \subseteqq \varepsilon_i \mathfrak{R}$ ist die Abbildung

$$H_i: \quad \varrho_i \bmod (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{R}_i) \to \varrho_i \bmod \varepsilon_i \mathfrak{l}$$

ein $\mathfrak{R}_i$-Monomorphismus von $\mathfrak{R}_i - \mathfrak{l}_i$ in $\varepsilon_i \mathfrak{R} - \varepsilon_i \mathfrak{l}$. Diese Abbildung ist ein Epimorphismus, wenn $\mathfrak{R}_i \cup \varepsilon_i \mathfrak{l} = \varepsilon_i \mathfrak{R}$ ist, eine Forderung, die nach 3. wegen $\mathfrak{R}_i = \varepsilon_i \mathfrak{S}$ erfüllt ist. Q.e.d.

Die die Treue von $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}$ betreffende Eigenschaft 2. läßt sich wieder mittels des Satzes 5 nachprüfen, falls man für $\mathfrak{R}$ voraussetzt, daß die $\mathfrak{M}_{ik} \neq 0$ aus Satz 5 gerade die minimalen Ideale von $\mathfrak{R}$ sind. Bereits aus der Forderung 4. folgt, daß $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}$ die $\mathfrak{M}_{ii}$ treu darstellt, denn die $\mathfrak{M}_{ii}$ sind nach §2 die minimalen Ideale $\mathfrak{W}_i^{(j)}$ [1] der primären Ringe $\mathfrak{R}_i$. Trotzdem ist 2. nicht überflüssig. Auch dies zeigt das

BEISPIEL 1 aus §2. Die diesen Ring aus $\mathfrak{R}$ definierenden Matrizen beziehen sich auf einen distributiven $\mathfrak{R}$-K-Modul $\mathfrak{m}$ mit Basiselementen $b_1, \ldots, b_6$. Er ist durch $b = b_5 + b_6$ erzeugbar, $\mathfrak{m} = \mathfrak{R} b$. Das Linksideal $\mathfrak{l} = (0 : b)$ besteht

aus den Matrizen

$$\lambda = \begin{pmatrix} p_1 & r_{12} & r_{13} & p_{14} & p_{15}, & -p_{15} \\ & q_2 & q_{23} & r_{24} & r_{25}, & -r_{25} \\ & & q_2 & r_{34} & r_{35}, & -r_{35} \\ & & & p_1 & p_{45}, & -p_{45} \\ & & & & p_1, & -p_1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

und erfüllt die Forderungen 1. bis 4. von Satz 7. Das Ideal $\mathfrak{l}' = \mathfrak{l} + C_{16}K$ erfüllt ebenfalls 1. und 3. Ferner ist $\mathfrak{l}' \cap \mathfrak{R}_1 = C_{14}K = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{l}' \cap \mathfrak{R}_2 = C_{23}K = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{R}_2$, also gilt auch 4. für $\mathfrak{l}'$. Dagegen widerspricht $C_{16}K \subseteqq \mathfrak{l}'$ der Forderung 2.; $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}'$ ist also nicht treu.

Schließlich sei noch bemerkt, daß zwar, wie oben gezeigt, jeder distributive $\mathfrak{R}$-K-Modul $\mathfrak{m}$ isomorph ist zu $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}$ mit einem die Eigenschaften 1. bis 4. von Satz 7 besitzenden Linksideal $\mathfrak{l}''$, daß aber nicht jedes Linksideal $\mathfrak{l}''$ mit $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}'' \cong \mathfrak{m}$ diese Eigenschaften zu besitzen braucht. Auch das läßt sich an dem obigen Beispiel 1. zeigen: $\mathfrak{m}$ ist offenbar auch $\mathfrak{R}$-isomorph zu dem $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}''$, dessen Linksideal $\mathfrak{l}''$ aus denjenigen Matrizen τ besteht, in deren letzter Spalte ausschließlich Nullen auftreten. Dann ist bereits 3. also $\mathfrak{R} = \mathfrak{S} \cup \mathfrak{l}''$ nicht mehr richtig.

§ 4

Der primäre Ring $\mathfrak{R}$ sei cleft, das heißt mit Hilfe des vollen Matrizenringes K_d über dem Körper K sei $\mathfrak{R}$ zerlegbar in

$$\mathfrak{R} = K_d + \mathfrak{W} \tag{1}$$

und dabei e der Exponent des Radikales $\mathfrak{W}$ von $\mathfrak{R}$. In $\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/\mathfrak{W}$ sei für das Idempotent $\zeta \in \mathfrak{R}$ mit $\zeta K = K\zeta$ das Rechtsideal $\bar{\zeta}\overline{\mathfrak{R}}$ maximal und damit $\mathfrak{r} = \zeta\mathfrak{R} \cup \mathfrak{W}$ ein maximales Rechtsideal in $\mathfrak{R}$. Für $d = 1$, das heißt für einen vollständig primären Ring, ist $\zeta = 0$. Setze $\eta = 1 - \zeta$, also $\eta^2 = \eta \neq 0$. Dann ist $\overline{\mathfrak{R}}\bar{\eta}$ ein minimales Linksideal in $\overline{\mathfrak{R}}$, also $\bar{\eta}\overline{\mathfrak{R}}\bar{\eta} = \bar{\eta}K = K\bar{\eta}$. Durch Auflösung der Restklassen modulo $\mathfrak{W}$ erhält man

$$\eta\,\mathfrak{R}\,\eta \cup \mathfrak{W} = \eta K \cup \mathfrak{W} = K\eta \cup \mathfrak{W}. \tag{2}$$

Nach §2 ist $\mathfrak{W}^{e-1}$ das einzige minimale Ideal in $\mathfrak{R}$, falls $\mathfrak{R}$ distributiv und K-linear darstellbar ist. Wie in Behrens [4], Sätze 3 und 4 gezeigt, ist dann $\mathfrak{W}^{e-1}\eta \neq 0$, und $\mathfrak{R}$ wird durch einen Faktormodul $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}$ distributiv dargestellt, dessen Linksideal $\mathfrak{l}$ ein $\mathfrak{l}K \subseteqq \mathfrak{l}$ genügendes Oberideal von $\mathfrak{R}\zeta$ mit folgender Maximaleigenschaft ist: $\mathfrak{l}$ genügt der Gleichung

$$\mathfrak{l} \cap (0 : \mathfrak{r}) = 0, \tag{3}$$

aber jedes echte Oberideal von $\mathfrak{l}$ schneidet das Linksideal $(0:\mathfrak{r})$ nicht nur in 0. Nach Satz 1 folgt aus $\mathfrak{l}K \subseteqq \mathfrak{l}$, daß auch $\mathfrak{l}'K \subseteqq \mathfrak{l}'$ für jedes Linksoberideal $\mathfrak{l}'$ von $\mathfrak{l}$ richtig ist.

Diese Eigenschaften von $\mathfrak{l}$ genügen nun aber, wie ebenfalls in Teil I, §2, durch das Beispiel 2 bewiesen wurde, noch nicht, um diejenigen Linksideale $\mathfrak{l}$ zu charakterisieren, die zu distributiven $\mathfrak{R}$-K-Moduln $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}$ führen. Alle weiteren Untersuchungen in §2 jener Arbeit laufen darauf hinaus, die obigen Eigenschaften zu den genauen an $\mathfrak{l}$ zu richtenden Forderungen zu verschärfen. Die Charakterisierung von $\mathfrak{l}$ läßt sich vereinfachen, wenn man den letzten Absatz von §2 der vorliegenden Abhandlung heranzieht. Danach stellt nämlich $\mathfrak{m}-\mathfrak{W}^{e-p}\mathfrak{m}$ den Faktorring $\mathfrak{R}/(0^{\cdot}.\mathfrak{W}^p)$ distributiv und K-linear dar, wenn $\mathfrak{m}$ ein distributiver $\mathfrak{R}$-K-Modul ist. Der Quotient $(0^{\cdot}.\mathfrak{W}^p)=\{\tau\,|\,\tau\in\mathfrak{R},\ \mathfrak{W}^p\tau=0\}$ sei gleich A_p gesetzt, also $A_0=0$, $A_{e-1}=\mathfrak{W}$, $A_e=\mathfrak{R}$. Wegen $\mathfrak{W}^{e-1}\neq 0$ ist dabei der Exponent des Radikales $\mathfrak{W}$ mod $\mathfrak{A}_p$ von $\mathfrak{R}/\mathfrak{A}_p$ gleich $e-p$. Auch für die Ringe $\mathfrak{R}/\mathfrak{A}_p$ gelten daher die obigen Bemerkungen, nämlich

1. $\mathfrak{W}^{e-p-1}$ mod $\mathfrak{A}_p$ ist das einzige minimale Ideal in $\mathfrak{R}/\mathfrak{A}_p$.

2. $\mathfrak{W}^{e-p-1}\eta\subsetneqq\mathfrak{A}_p$.

3. In $\mathfrak{R}$ existiert ein Linksideal $\mathfrak{l}$ mit den folgenden Eigenschaften: $\alpha)$ $\mathfrak{l}\supseteqq\mathfrak{R}\zeta$, $\beta)$ $\mathfrak{l}'K\subseteqq\mathfrak{l}'$ für jedes Linksoberideal $\mathfrak{l}'$ von $\mathfrak{l}'$, $\gamma)$ für alle $p=0,1,\ldots,e-1$ ist $\mathfrak{l}\cup\mathfrak{A}_p$ bezüglich der Forderung

$$(\mathfrak{l}\cup\mathfrak{A}_p)\cap(\mathfrak{A}_p:\mathfrak{r})=\mathfrak{A}_p \tag{4}$$

unter allen Linksoberidealen von $\mathfrak{l}\cup\mathfrak{A}_p$ maximal.

Offenbar ist (4) die Gl. (3) modulo $\mathfrak{A}_p$ betrachtet, das Ideal $\mathfrak{R}\zeta$ erfüllt wegen $\zeta\in\mathfrak{r}$ die Gl. (4) für $p=0$. In Hilfssatz 2 wird gezeigt werden, daß ein Linksideal $\mathfrak{l}$, welches der Gl. (4) für $p=0$ genügt, diese Gleichung für alle p befriedigt. Selbstverständlich gibt es für jeden primären Ring — auch für die nicht distributiv darstellbaren — und jedes p ein von p abhängendes Linksoderideal $\mathfrak{l}_p$ von $\mathfrak{R}\zeta$, welches bezüglich der Forderung (4) unter allen Linksoberidealen von $\mathfrak{A}_p$ maximal ist. In $3\,\gamma)$ wird jedoch verlangt, daß $\mathfrak{l}_p=\mathfrak{l}\cup\mathfrak{A}_p$ mit einem einzigen $\mathfrak{l}$ für alle p richtig ist. Neben 1. und 2. ist die letzte zur Charakterisierung der distributiv darstellbaren unter den primären Ringen benötigte Eigenschaft gerade die Existenz eines 3. befriedigenden $\mathfrak{l}$, wie die folgenden Ausführungen zeigen werden.

HILFSSATZ 2. *Voraussetzungen.* $\mathfrak{R}$ *sei ein primärer Artin-Ring mit Einselement,* $\mathfrak{A}_\nu=(0^{\cdot}.\mathfrak{W}^\nu)$, $\mathfrak{r}$ *ein Rechtsideal und* $\mathfrak{l}$ *ein Linksideal in* $\mathfrak{R}$ *mit*

$$\mathfrak{l}\cap(0:\mathfrak{r})=0. \tag{5}$$

Behauptung. $(\mathfrak{l}\cup\mathfrak{A}_p)\cap(\mathfrak{A}_p:\mathfrak{r})=\mathfrak{A}_p$ *für* $p=0,1,\ldots,e$.

BEWEIS. Angenommen, es existierte ein nicht in $\mathfrak{A}_p$ enthaltenes Ringelement σ aus dem Durchschnitt $(\mathfrak{l}\cup\mathfrak{A}_p)\cap(\mathfrak{A}_p:\mathfrak{r})$. Da $\sigma\notin\mathfrak{A}_p$, ist $\mathfrak{W}^p\sigma\neq 0$. Aus $\sigma\in(\mathfrak{A}_p:\mathfrak{r})$ folgt $\sigma\mathfrak{r}\subseteqq\mathfrak{A}_p$, also $\mathfrak{W}^p\cdot\sigma\mathfrak{r}=0$, also auch $\mathfrak{W}^p\sigma\cdot\mathfrak{r}=0$. Schließlich zieht $\sigma\in\mathfrak{l}\cup\mathfrak{A}_p$ nach sich $\mathfrak{W}^p\sigma\subseteqq\mathfrak{W}^p\mathfrak{l}\cup 0=\mathfrak{W}^p\mathfrak{l}$. Dies widerspricht aber wegen $\mathfrak{W}^p\sigma\neq 0$ der Gl. (5).

Der primäre Ring $\mathfrak{R}$ genüge im folgenden den Forderungen 1. und 2. In ihm sei $\mathfrak{l}$ ein Linksideal mit den unter 3. genannten Eigenschaften. Die Gl. (19) in Teil I legt nahe den

Hilfssatz 3.

(6) $$\mathfrak{W}^{e-p}\eta \cup \mathfrak{l} = \mathfrak{A}_p \cup \mathfrak{l} \quad \textit{für alle } p.$$

Beweis durch vollständige Induktion nach p. Wegen $\mathfrak{W}^e = 0$ liegt für alle p die linke Seite von (6) in der rechten. Die Verankerung der Induktion bei $p=0$ ist wegen $\mathfrak{A}_0 = 0$ trivial. Also gelte (6) für p. Angenommen, es wäre $\mathfrak{A}_{p+1} \subsetneqq \mathfrak{W}^{e-p-1}\eta \cup \mathfrak{l}$ oder, äquivalent damit, es wäre

(7) $$\mathfrak{A}_{p+1} \supset (\mathfrak{W}^{e-p-1}\eta \cup \mathfrak{l}) \cap \mathfrak{A}_{p+1} = \mathfrak{W}^{e-p-1}\eta \cup (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{A}_{p+1}),$$

wobei die letzte Gleichung aus der Modularität des Verbandes der Linksideale eines Ringes und aus $\mathfrak{W}^{e-p-1}\eta \subseteq \mathfrak{A}_{p+1}$ folgt. Nach Induktionsannahme enthält die rechte Seite von (7) das Ideal $\mathfrak{A}_p$. Weil $\mathfrak{r} = \zeta\mathfrak{R} \cup \mathfrak{W}$ und $\eta\zeta = 0$, liegt $\mathfrak{W}^{e-p-1}\eta$ in $(\mathfrak{A}_p : \mathfrak{r})$. Demnach ist $\mathfrak{d} = \mathfrak{W}^{e-p-1}\eta \cap (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{A}_{p+1}) \subseteq \mathfrak{A}_p$, denn nach Voraussetzung gilt (4). Modulo $\mathfrak{A}_p$ betrachtet, ist also die letzte Verbindung in (7) eine $\mathfrak{R}$-direkte Summe von Linksidealen. Schließlich ist auch $\mathfrak{W}\mathfrak{A}_{p+1} \subseteq \mathfrak{A}_p$. Aus der vollen Reduzibilität des $\mathfrak{R}/\mathfrak{W}$-Moduls $\mathfrak{A}_{p+1} - \mathfrak{A}_p$ folgt die Existenz eines echten Linksoberideales $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{A}_p$ derart, daß

(8) $$\mathfrak{A}_{p+1} = \mathfrak{W}^{e-p-1}\eta + (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{A}_{p+1}) + \mathfrak{b} \quad \text{modulo } \mathfrak{A}_p$$

eine $\mathfrak{R}$-direkte Summe von Linksidealen in $\mathfrak{R}/\mathfrak{A}_p$ ist. Nun ist $\mathfrak{b} \subsetneqq \mathfrak{l} \cup \mathfrak{A}_p$, weil sonst wegen der Induktionsannahme (6) für p das Ideal $\mathfrak{A}_{p+1}$ doch in $\mathfrak{W}^{e-p-1}\eta \cup \mathfrak{l}$ enthalten wäre. Für das echte Linksoberideal $\mathfrak{b} \cup \mathfrak{l} \cup \mathfrak{A}_p = \mathfrak{b} \cup \mathfrak{l}$ von $\mathfrak{l} \cup \mathfrak{A}_p$ ist nach Voraussetzung 3 γ) über $\mathfrak{l}$ die Gl. (4) nicht mehr richtig, also $\mathfrak{d}' = (\mathfrak{b} \cup \mathfrak{l}) \cap (\mathfrak{A}_p : \mathfrak{r}) \supset \mathfrak{A}_p$. Außerdem ist (alles wegen der zu einem Widerspruch zu führenden Annahme, daß die Gl. (6) nicht mehr für $p+1$ gelte) wegen 3 β) die Inklusion $(\mathfrak{b} \cup \mathfrak{l})K \subseteq \mathfrak{b} \cup \mathfrak{l}$, also auch $\mathfrak{d}'K \subseteq \mathfrak{d}'$ richtig. Nach den Voraussetzungen 1. und 2. über $\mathfrak{R}$ enthält das echte Oberideal $\mathfrak{d}'\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{A}_p$ das Ideal $\mathfrak{W}^{e-p-1}$, also auch $\mathfrak{W}^{e-p-1}\eta$. Daraus und aus (2) folgt $\mathfrak{W}^{e-p-1}\eta \subseteq \mathfrak{d}'\mathfrak{R}\eta \subseteq \mathfrak{d}'\zeta\mathfrak{R}\eta \cup \mathfrak{d}'\eta\mathfrak{R}\eta \subseteq \mathfrak{d}'\mathfrak{W} \cup \mathfrak{d}'(K\eta \cup \mathfrak{W}) \subseteq \mathfrak{A}_p \cup \mathfrak{d}'K \subseteq \mathfrak{A}_p \cup \mathfrak{d}'$. Dies führt aber zu einem Widerspruch, denn wegen $\mathfrak{A}_p \cup \mathfrak{d}' \subseteq \mathfrak{b} \cup \mathfrak{l}$ folgt hieraus $\mathfrak{W}^{e-p-1}\eta \subseteq (\mathfrak{b} \cup \mathfrak{l}) \cap \mathfrak{A}_{p+1} = \mathfrak{b} \cup (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{A}_{p+1})$, also wäre modulo $\mathfrak{A}_p$ die Summe auf der rechten Seite von (8) doch nicht direkt, da nach Voraussetzung $\mathfrak{W}^{e-p-1}\eta \subsetneqq \mathfrak{A}_p$, q.e.a.

Aus dem Hilfssatz 3 kann man schließen, daß $\mathfrak{R} - (\mathfrak{W}^{e-p} \cup \mathfrak{l})$ *ein treuer* $\mathfrak{R}/\mathfrak{A}_p$*-Modul ist,* das heißt, daß dieser Modul nicht das minimale Ideal $\mathfrak{W}^{e-p-1}$ modulo $\mathfrak{A}_p$ annulliert. $\mathfrak{W}^{e-p-1}\eta$ liegt nämlich wegen $\mathfrak{r} = \zeta\mathfrak{R} \cup \mathfrak{W}$ in $(\mathfrak{A}_p : \mathfrak{r})$, jedoch nach Voraussetzung 2. nicht in $\mathfrak{A}_p$. Also ist, wegen (4), $\mathfrak{W}^{e-p-1}\eta \subsetneqq \mathfrak{l} \cup \mathfrak{A}_p$, also gilt erst recht $\mathfrak{W}^{e-p-1} = \mathfrak{W}^{e-p-1} \subsetneqq \mathfrak{l} \cup \mathfrak{A}_p = \mathfrak{W}^{e-p}\eta \cup \mathfrak{l} = \mathfrak{W}^{e-p} \cup \mathfrak{l}$, da $\mathfrak{R}\zeta \subseteq \mathfrak{l}$. Das $\mathfrak{l}$ enthaltende Linksideal $\mathfrak{W}^{e-p} \cup \mathfrak{l}$ ist nach 3 β) ein K-Rechtsmodul, der Faktormodul $\mathfrak{R} - (\mathfrak{W}^{e-p} \cup \mathfrak{l})$ also ein bezüglich $\mathfrak{R}/\mathfrak{A}_p$, treuer $\mathfrak{R}/\mathfrak{A}_p$-$K$-Modul.

Jedoch sind die echten $\mathfrak{R}/\mathfrak{A}_p$*-K-Faktormoduln von* $\mathfrak{R} - (\mathfrak{W}^{e-p} \cup \mathfrak{l})$ *nicht mehr treu.*

Beweis. $\mathfrak{l}'$ sei echtes Linksoberideal von $\mathfrak{W}^{e-p} \cup \mathfrak{l} = \mathfrak{A}_p \cup \mathfrak{l}$, also $\mathfrak{l}'K \subseteq \mathfrak{l}'$. Nach Voraussetzung 3 γ) über die Maximalität von $\mathfrak{l} \cup \mathfrak{A}_p$ ist $\mathfrak{d}'' = \mathfrak{l}' \cap (\mathfrak{A}_p : \mathfrak{r}) \supset \mathfrak{A}_p$. Ähnlich wie beim Beweis des Hilfssatzes 3 kann man aus $\mathfrak{d}'' \subseteq (\mathfrak{A}_p : \mathfrak{r})$ und aus $\zeta \in \mathfrak{r}$ auf $\mathfrak{d}'' \subseteq \mathfrak{d}''\eta \cup \mathfrak{A}_p$ schließen und dann weiter wegen $\mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{r}$ und (2) auf

$\mathfrak{d}''\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{d}''\eta\mathfrak{R} \cup \mathfrak{A}_p = \mathfrak{d}''\eta\mathfrak{R}\zeta \cup \mathfrak{d}''\eta\mathfrak{R}\eta \cup \mathfrak{A}_p = \mathfrak{d}''K\eta \cup \mathfrak{A}_p = \mathfrak{d}''\eta \cup \mathfrak{A}_p = \mathfrak{d}'' \cup \mathfrak{A}_p \subseteq \mathfrak{l}' \cup \mathfrak{A}_p = \mathfrak{l}'$. Demnach wird das in $\mathfrak{R}/\mathfrak{A}_p$ liegende, vom Nullideal verschiedene Ideal $\mathfrak{d}''\mathfrak{R}/\mathfrak{A}_p$ durch $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}'$ annulliert.

Aus den Ergebnissen der beiden letzten Absätze läßt sich nun die abschließende Behauptung herleiten, daß $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}$ ein distributiver $\mathfrak{R}$-K-Modul ist. $\mathfrak{l}$ und damit auch $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}$ sind nämlich nach 3 β) $\mathfrak{R}$-K-Moduln. Die Treue von $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}$ als $\mathfrak{R}$-Modul ist das auf $p = 0$ spezialisierte Ergebnis des vorletzten Absatzes. Zu zeigen ist gemäß Satz 6 nur noch, daß eine maximale Kette von Linksoberidealen von $\mathfrak{l}$ die Länge e hat oder, was damit äquivalent ist, daß für alle p die Faktormoduln $(\mathfrak{W}^{e-p-1} \cup \mathfrak{l}) - (\mathfrak{W}^{e-p} \cup \mathfrak{l})$ $\mathfrak{R}$-irreduzibel sind. Angenommen, es existierte ein Linksideal $\mathfrak{u}$ mit

$$\mathfrak{W}^{e-p} \cup \mathfrak{l} \subset \mathfrak{u} \subset \mathfrak{W}^{e-p-1} \cup \mathfrak{l}. \tag{9}$$

Als Oberideal von $\mathfrak{l}$ wäre $\mathfrak{u}K \subseteq \mathfrak{u}$; also $\mathfrak{R} - \mathfrak{u}$ ein echter $\mathfrak{R}/\mathfrak{A}_p$-$K$-Faktormodul von $\mathfrak{R} - (\mathfrak{W}^{e-p} \cup \mathfrak{l})$, der nach dem letzten Absatz nicht treu sein könnte, das heißt es wäre $(\mathfrak{u} : \mathfrak{R}) > \mathfrak{A}_p$. Da $(\mathfrak{u} : \mathfrak{R})$ Ideal in $\mathfrak{R}$ ist, folgte aus der Voraussetzung $\mathfrak{l}$ die Inklusion $\mathfrak{W}^{e-p-1} \subseteq (\mathfrak{u} : \mathfrak{R})$, also $\mathfrak{W}^{e-p-1} \subseteq \mathfrak{u}$ und damit, wegen $\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{u}$, die (9) widersprechende Beziehung $\mathfrak{W}^{e-p-1} \cup \mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{u}$.

Alle diese Überlegungen lassen sich zu dem folgenden Satz zusammenfassen:

SATZ 8. *Voraussetzungen* $\mathfrak{R} = K_d + \mathfrak{W}$ *sei ein primärer Artin-Ring. Der Exponent seines Radikales* $\mathfrak{W}$ *sei* e. *Für* $p = 0, 1, \ldots, e-1$ *seien mit* $\mathfrak{A}_p$ *die Ideale* $(0 : \mathfrak{W}^p) = \{\tau \mid \tau \in \mathfrak{R}, \mathfrak{W}^p\tau = 0\}$ *bezeichnet. — Für das die Gleichung* $\zeta K = K\zeta$ *erfüllende Idempotent* ζ *sei das Rechtsideal* $\mathfrak{r} = \zeta\mathfrak{R} \cup \mathfrak{W}$ *maximal in* $\mathfrak{R}$. *Sei* $\eta = 1 - \zeta$.

Behauptungen. Der Ring $\mathfrak{R}$ *ist dann und nur dann distributiv und* K*-linear darstellbar, wenn folgende drei Bedingungen in ihm für alle* p *erfüllt sind:*

1. $\mathfrak{W}^{e-p-1} \cup \mathfrak{A}_p$ *ist für jedes* p *das einzige minimale Oberideal von* $\mathfrak{A}_p$.
2. $\mathfrak{W}^{e-p-1}\eta \nsubseteq \mathfrak{A}_p$.
3. *In* $\mathfrak{R}$ *existiert ein Linksideal* $\mathfrak{l}$ *mit folgenden Eigenschaften*
   - α) $\mathfrak{R}\zeta \subseteq \mathfrak{l}$.
   - β) $\mathfrak{l}'K \subseteq \mathfrak{l}'$ *für jedes Linksoberideal* $\mathfrak{l}'$ *von* $\mathfrak{l}$.
   - γ) *Für alle* p *gilt mit diesem* $\mathfrak{l}$ *die Gleichung*

$$(\mathfrak{l} \cup \mathfrak{A}_p) \cap (\mathfrak{A}_p : \mathfrak{r}) = \mathfrak{A}_p, \tag{4}$$

aber für kein p *existiert ein echtes Linksoberideal von* $\mathfrak{l} \cup \mathfrak{A}_p$, *welches ebenfalls noch der Gl.* (4) *genügt.*

Wenn die Bedingungen 1. und 2. in $\mathfrak{R}$ *erfüllt sind und für das Linksideal* $\mathfrak{l}$ *auch noch 3. gilt, dann ist* $\mathfrak{R} - \mathfrak{l}$ *ein distributiver* $\mathfrak{R}$-K-*Modul.*

Wenn $\mathfrak{R}-\mathfrak{l}^*$ ein distributiver $\mathfrak{R}$-K-Modul ist, besitzt $\mathfrak{l}^*$ die unter 3. genannten Eigenschaften für ein geeignetes Idempotent ζ.

In jedem primären Artin-Ring mit Einselement impliziert für beliebige Rechts- und Linksideale $\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{l}$ die Gl. (4) für $p=0$ ihre Gültigkeit für alle p.

Benutzt man den Begriff des *Sockels eines Ringes* — s. z.B. JACOBSON [7], IV.3 — so kann man die $\mathfrak{A}_p$ und das Linksideal $(0:\mathfrak{r})$ folgendermaßen beschreiben: Der Linkssockel eines Ringes $\mathfrak{R}$ besteht aus der Verbindung der minimalen Linksideale von $\mathfrak{R}$, analog der Rechtssockel. Wegen der Nilpotenz $\mathfrak{W}$ gilt für jedes minimale Linksideal $\mathfrak{l}_1$ von $\mathfrak{R}$ die Gleichung $\mathfrak{W}\mathfrak{l}_1=0$, also $\mathfrak{l}\subseteqq\mathfrak{A}_1$. Als $\mathfrak{R}/\mathfrak{W}$-Modul ist $\mathfrak{A}_1$ vollreduzibel, also direkte Summe minimaler Linksideale von $\mathfrak{R}$. Hieran sieht man, daß $\mathfrak{A}_1=(0\cdot\mathfrak{W})$ der Linkssockel von $\mathfrak{R}$, und ebenso $\mathfrak{A}_2/\mathfrak{A}_1$ der Linkssockel des Faktorringes $\mathfrak{R}/\mathfrak{A}_1$ ist, und so weiter. — Für das maximale Rechtsideal $\mathfrak{r}=\zeta\mathfrak{R}\cup\mathfrak{W}$ gilt $(0:\mathfrak{r})=(0:\mathfrak{W})\cap(0:\zeta)$. Hierin ist $(0:\mathfrak{W})$ der Rechtssockel des Ringes $\mathfrak{R}$; dieser also gleich $(0:\mathfrak{r})$ falls $\mathfrak{R}$ vollständig primär ist. Wenn $\mathfrak{R}$ nur primär ist, ist wegen $\zeta^2=\zeta$ und $\eta=1-\zeta$ der Quotient $(0:\zeta)=\mathfrak{R}\eta$. Im Faktorring $\overline{\mathfrak{R}}=\mathfrak{R}/\mathfrak{W}$ ist dabei $\overline{\mathfrak{R}}\,\overline{\eta}$ ein minimales Linksideal, und damit $\mathfrak{R}\eta$ selbst ein unzerlegbares Ideal in $\mathfrak{R}$. Hieraus folgt, daß sich das Linksideal $(0:\mathfrak{r})=(0:\mathfrak{W})\cap\mathfrak{R}\eta$ auch als Schnitt des Rechtssockels $(0:\mathfrak{W})$ von $\mathfrak{R}$ mit einem unzerlegbaren Linksideal $\mathfrak{R}\eta$ beschreiben läßt.

Der Satz 8 gibt eine Charakterisierung der distributiv und K-linear darstellbaren primären Ringe $\mathfrak{R}$ durch innere Eigenschaften von $\mathfrak{R}$, die neben die in Teil I am Ende von §2 gegebene ringinterne Beschreibung dieser Ringe tritt. Sie ist vielleicht befriedigender als die Charakterisierung von Teil I, weil in ihr von $\mathfrak{l}$ nur als einem Linksideal gesprochen wird, aber nicht auch noch als einem ω-Modul bezüglich des in Teil I definierten speziellen Ringelementes ω, dessen Existenz dort bei der Charakterisierung postuliert werden mußte. Nur scheinbar vermeiden die Ausführungen in Teil I den schrittweisen Aufbau, der in den Satz 8 der vorliegenden Arbeit dadurch hineinkommt, daß 1. bis 3. für alle p verlangt wird. Man darf nämlich nicht verkennen, daß obwohl 1., 2. und 3 γ) in Teil I nur für $p=0$ gefordert werden, die Einführung von ω einen solchen Stufenaufbau enthält. — Beide ringinterne Kriterien beruhen letzten Endes auf der in Satz 6 ausgesprochenen grundlegenden Charakterisierung der distributiv und K-linear darstellbaren Ringe, die wegen der dort genannten Gleichung $l=e_1+\cdots+e_q$ prinzipiell einen auf den einzelnen Sockeln beruhenden schrittweisen Aufbau rechtfertigt.

Die Frage liegt nahe, ob man in Satz 8 die Bedingung 3 weglassen kann, ob also bereits 1. und 2. für die distributive und K-lineare Darstellbarkeit von $\mathfrak{R}$ hinreichen. Dem ist jedoch nicht so, wie das folgende Beispiel zeigt:

BEISPIEL 2.

$$\mathfrak{R}=\{\tau\},\qquad \tau=\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5\\ & t_1 & 0 & 0 & t_2\\ & & t_1 & t_2 & t_6\\ & 0 & & t_1 & t_7\\ & & & & t_1 \end{pmatrix}.$$

t_i beliebig aus einem kommutativen Körper K. Der Exponent von $\mathfrak{W}$ ist 4. Ferner ist $\zeta = 0$, also $\mathfrak{r} = \mathfrak{W}$. Die Linkssockeln sind

$$\mathfrak{A}_1 = \{\tau \mid 0 = t_1 = t_2 = t_6 = t_7\} \quad \text{in } \mathfrak{R},$$
$$\mathfrak{A}_2 = \{\tau \mid 0 = t_1 = t_7\} \quad \text{modulo } \mathfrak{A}_1 \text{ in } \mathfrak{R}/\mathfrak{A}_1,$$
$$\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{W} \quad \text{modulo } \mathfrak{A}_2 \text{ in } \mathfrak{R}/\mathfrak{A}_2.$$

Die einzigen minimalen Oberideale von $\mathfrak{A}_0 = 0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$ sind der Reihe nach $\mathfrak{W}^3$, $\mathfrak{W}^2 \cup \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{W} \cup \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{W}$ und $\mathfrak{R}$. Der Ring $\mathfrak{R}$ besitzt nur ein einziges maximales, den Quotienten $(0:\mathfrak{r}) = (0:\mathfrak{W}) = \{\tau \mid 0 = t_1 = t_2 = t_3 = t_4\}$ nur in 0 schneidendes Linksideal, nämlich $\mathfrak{l} = \{\tau \mid 0 = t_1 = t_2 = t_5 = t_6 = t\} = C_{13}K + C_{14}K$. Jedoch ist $\mathfrak{R}$ nicht distributiv darstellbar. Nach dem in Satz 8 ausgesprochenen Kriterium müßte nämlich $\mathfrak{l} \cup \mathfrak{A}_1$ ebenfalls maximal sein unter allen Linksoberidealen $\mathfrak{l}'$ von $\mathfrak{l} \cup \mathfrak{A}_1$ bezüglich $(\mathfrak{l} \cup \mathfrak{A}_1) \cap (\mathfrak{A}_1 : \mathfrak{r}) = \mathfrak{A}_1$. Dies ist aber nicht der Fall, denn das echte Linksoberideal $\mathfrak{l}' = \{\tau \mid 0 = t_1 = t_6 = t_7\}$ von $\mathfrak{l} \cup \mathfrak{A}_1$ schneidet ebenfalls $(\mathfrak{A}_1 : \mathfrak{r}) = (\mathfrak{A}_1 : \mathfrak{W}) = \{\tau \mid 0 = t_1 = t_2\}$ nur in $\mathfrak{A}_1$.

Literatur

[1] ARTIN, E., C. J. NESBITT and R. M. THRALL: Rings with minimum condition. Ann. Arbor 1944.

[2] BEHRENS, E.-A.: Algebren mit vorgegebenem endlichem, distributivem Idealverband. Math. Ann. **133**, 79–90 (1957).

[3] — Eine Charakterisierung der T-Moduln mit distributivem Untermodulverband bei halbprimärem T. Arch. Math. **8**, 265–273 (1957).

[4] — Distributiv darstellbare Ringe. Math. Z. **73**, 409–432 (1960).

[5] BIRKHOFF, G.: Lattice Theory, 2. Aufl. New York 1948.

[6] HERMES, H.: Einführung in die Verbandstheorie. Berlin 1955.

[7] JACOBSON, N.: Structure of rings. Providence 1956.

Frankfurt a. M., Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 26. November 1960)

Sabidussi, G.
Math. Zeitschr. 76, 385–401 (1961)

Graph Derivatives[1])

By
Gert Sabidussi

1. Introduction

By a *graph* X we mean a set $V(X)$ together with a set $E(X)$ of unordered pairs of *distinct* elements of $V(X)$. We shall use brackets to indicate unordered pairs. The elements of $V(X)$ are called the *vertices* of X, the elements of $E(X)$ the *edges* of X. Two edges $e=[x, y]$ and $e'=[x', y']$ of X will be called *adjacent* if and only if $e \neq e'$ and two of the vertices x, y, x', y' are equal.

With every graph X one can associate a graph ∂X, the *derivative*[2]) of X, by defining

$$V(\partial X) = E(X),$$

$$E(\partial X) = \{[e, e']: e \text{ and } e' \text{ are adjacent edges of } X\}.$$

It has been proved by Whitney [4] that if X and Y are non-empty connected graphs with $\partial X \approx \partial Y$[3]) and such that neither X nor Y is a complete 3-graph, then $X \approx Y$. For a restricted class of graphs a proof different from Whitney's was recently given by Izbicki [2].

The present paper is concerned with the relationships between covers of graphs by non-overlapping complete graphs and a certain class of connected even graphs (called admissible in section 4). Considering a graph X as a symmetric, strictly non-reflexive relation on its set of vertices, we form the relational product X^2 of X by itself, and observe that if X is an admissible even graph, then X^2 consists of exactly two components each of which admits a cover by non-overlapping complete graphs. We are interested in deriving conditions under which these natural covers are (i) maximal with respect to refinement, or (ii) invariant under the action of automorphisms. The results obtained (in particular, theorem (4.8)) enable us to prove Whitney's theorem as a simple corollary. We also show that if X is a connected graph not isomorphic to any of four exceptional graphs, then X and ∂X have isomorphic automorphism groups (section 5). In section 7 we prove Whitney's theorem for graphs with multiple edges. For these graphs, however, the validity of the theorem is somewhat reduced.

---

[1]) Written with the support of the National Science Foundation of the United States of America, Grant No. NSF-G 14084.

[2]) ∂X is the dual of X in the sense of combinatorial topology. For our purposes, however, it seemed justified to apply this term to the graph $\delta_{\mathfrak{A}} X$ (cf. action 3).

[3]) For a definition of $\approx$ (isomorphism) see section 2.

2. Definitions

Let X and Y be graphs. By $X \cup Y$ and $X \cap Y$ we mean the graphs given by $V(X \cup Y) = V(X) \cup V(Y)$, $E(X \cup Y) = E(X) \cup E(Y)$, and $V(X \cap Y) = V(X) \cap V(Y)$, $E(X \cap Y) = E(X) \cap E(Y)$, respectively. Let $x \in V(X)$. Then (x) denotes the graph consisting of the vertex x and no edges. Similarly, if $e \in E(X)$, (e) denotes the graph formed by e and its two ends. When no confusion is likely we write x instead of (x), and e instead of (e). Also, we shall frequently write $x \in X$ and $e \in X$ for $x \in V(X)$ and $e \in E(X)$, respectively.

Let A be a set. By $|A|$ we denote the cardinal of A. If X is a graph $|V(X)|$ is called the *order* of X, and is denoted by $|X|$.

Given a graph X and a vertex $x \in V(X)$ by $E(X; x)$ and $V(X; x)$ we mean the following sets:

$$E(X; x) = \{e \in E(X) : (e) \supset (x)\},$$
$$V(X; x) = \{y \in V(X) : [x, y] \in E(X)\}.$$

By $d(X; x)$ we shall denote the *degree* of x in X, i.e., $d(X; x) = |E(X; x)| = |V(X; x)|$.

Let X be a graph, $x, y \in V(X)$. A *path* joining x and y is a sequence $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqq 0$, where $x_0 = x$, $x_n = y$, and $[x_{i-1}, x_i] \in E(X)$, $i = 1, \ldots, n$. n is called the *length* of P and is denoted by $|P|$. A graph X is *connected* if any two vertices of X are joined by a path.

An *n-circuit* of X $(n \geqq 3)$ is a sequence $C = (x_1, \ldots, x_n)$ of distinct vertices of X such that $[x_{i-1}, x_i] \in E(X)$, $i = 2, \ldots, n$, $[x_1, x_n] \in E(X)$. $n = |C|$ is called the *order* of C. By mesh X we shall mean $\min |C|$ extended over all circuits of X. If X contains no circuits we put mesh $X = \infty$.

Let X and Y be graphs. A function $\varphi : V(X) \to V(Y)$ is called a *homomorphism* of X into Y if and only if $[\varphi x, \varphi y] \in E(Y)$ whenever $[x, y] \in E(X)$. We shall always write $\varphi : X \to Y$ instead of $\varphi : V(X) \to V(Y)$. Note that if φ is a homomorphism of X into Y then φ induces a function $\tilde{\varphi} : E(X) \to E(Y)$ by

$$\tilde{\varphi}[x, y] = [\varphi x, \varphi y], \qquad [x, y] \in E(X).$$

A homomorphism of X into Y is a *monomorphism* if it is one-one. A monomorphism $\varphi : X \to Y$ is an *isomorphism* of X *onto* Y if *both* φ *and* $\tilde{\varphi}$ are *onto*. Equivalently, φ is an isomorphism if both φ and φ^{-1} are monomorphisms. When no confusion is likely, we shall write φ for $\tilde{\varphi}$. If there is an isomorphism φ of X onto Y we shall write $X \approx Y$ or $\varphi : X \approx Y$ and say that X and Y are *isomorphic*. An *automorphism* of X is an isomorphism of X onto itself. By $G(X)$ we denote the automorphism group of X.

A graph X is called *complete* if and only if $x, y \in V(X)$, $x \neq y$, implies $[x, y] \in E(X)$. If X is complete and $|X| = n$, X is isomorphic to the *complete n-graph* C_n given by $V(C_n) = N$, where N is the set of all ordinals[4]) whose cardinal is $< n$, and $E(C_n) = \{[\alpha, \beta] : \alpha, \beta \in N, \alpha \neq \beta\}$.

[4]) The special choice of N is made only for purposes of standardization.

3. Covers, quasi-derivatives

(3.1) DEFINITION. Let X be a graph. By a *cover* of X is meant a collection $\mathfrak{A}$ of subgraphs of X such that

(i) $\cup\{A\colon A\in\mathfrak{A}\}=X$;

(ii) $E(A\cap B)=\square$ (= the empty set) if $A, B\in\mathfrak{A}$ and $A\neq B$ (i.e., distinct members of $\mathfrak{A}$ do not overlap).

It is immediate from (3.1) that for each $e\in E(X)$ there is a unique element of $\mathfrak{A}$ which contains e. We shall denote this element of $\mathfrak{A}$ by A_e.

Let $\mathfrak{A}$ be a cover of X, $\varphi\in G(X)$. By $\varphi\mathfrak{A}$ we denote the set $\{\varphi A\colon A\in\mathfrak{A}\}$. Clearly $\varphi\mathfrak{A}$ is a cover of X. $\mathfrak{A}$ is called *invariant* if and only if $\varphi\mathfrak{A}=\mathfrak{A}$ for each $\varphi\in G(X)$.

Let $\mathfrak{M}$ be a collection of subgraphs of X with the property that if $\mathfrak{N}$ is a tower[5]) in $\mathfrak{M}$, then $\cup\mathfrak{N}\in\mathfrak{M}$. A cover $\mathfrak{A}$ of X is called an $\mathfrak{M}$-*cover* if $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{M}$. In particular, if each $A\in\mathfrak{A}$ is complete, then $\mathfrak{A}$ will be called a *complete* cover. By $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{M}}$ we denote the collection of all $\mathfrak{M}$-covers of X.

We partially order $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{M}}$ by refinement, i.e., we set $\mathfrak{A}\leqq\mathfrak{B}$ if and only if $A\in\mathfrak{A}$ implies $A\subset B$ for some $B\in\mathfrak{B}$.

(3.2) THEOREM. *If X has an (invariant) $\mathfrak{M}$-cover then X has a maximal (invariant) $\mathfrak{M}$-cover.*

PROOF. Let $\{\mathfrak{A}_\lambda\colon \lambda\in\Lambda\}$ be a totally ordered subset of $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{M}}$. For each $e\in X$ and $\lambda\in\Lambda$ let $A_{\lambda e}\in\mathfrak{A}_\lambda$ be such that $e\in A_{\lambda e}$. Put $A_e=\cup\{A_{\lambda e}\colon \lambda\in\Lambda\}$. $\mathfrak{N}_e=\{A_{\lambda e}\colon \lambda\in\Lambda\}$ is a tower in $\mathfrak{M}$, hence $A_e\in\mathfrak{M}$. If $E(A_e\cap A_{e'})\neq\square$, then $E(A_{\lambda e}\cap A_{\lambda' e'})\neq\square$ for some $\lambda, \lambda'\in\Lambda$. Without loss of generality $\mathfrak{A}_{\lambda'}\leqq\mathfrak{A}_\lambda$. Hence $A_{\lambda' e'}\subset A_{\lambda e'}$, and therefore by (3.1) (ii), $A_{\lambda e}=A_{\lambda e'}$. Hence $A_e=A_{e'}$. Thus $\mathfrak{A}=\{A_e\colon e\in X\}\in\boldsymbol{A}_{\mathfrak{M}}$, and $\mathfrak{A}\geqq\mathfrak{A}_\lambda$ for each $\lambda\in\Lambda$, whence it follows by Zorn's Lemma that $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{M}}$ has a maximal element. The proof for maximal invariant covers is analogous.

For any graph X the *trivial* cover

$$\mathfrak{T}=\{(e)\colon e\in E(X)\}\cup\{(x)\colon x\in X, d(X; x)=0\}$$

is a complete invariant cover which refines every complete cover of X. Consequently, every graph has a maximal complete cover and a maximal invariant complete cover.

(3.3) DEFINITION. A graph X is called a *quasi-derivative* if and only if it is connected and has an invariant maximal complete cover (i.e., a maximal complete cover which is invariant).

If $\mathfrak{A}$ is any cover of X we define the $\mathfrak{A}$-*dual*[6]) $\delta_{\mathfrak{A}}X$ of X as follows:

$$V(\delta_{\mathfrak{A}}X)=\mathfrak{A},$$
$$E(\delta_{\mathfrak{A}}X)=\{[A, B]\colon A, B\in\mathfrak{A},\ A\neq B,\ A\cap B\neq\square\}.$$

[5]) A *tower* is a collection of subgraphs totally ordered by inclusion.

[6]) $\delta_{\mathfrak{A}}X$ actually is the nerve of $\mathfrak{A}$; we have preferred the name dual in view of theorem (3.6).

(3.4) REMARK. *If X has no isolated vertices, then $\delta_{\mathfrak{T}} X = \partial X$.*

Put $G_{\mathfrak{A}} = \{\varphi \in G(X) : \varphi \mathfrak{A} = \mathfrak{A}\}$. Then $\varphi A_e = A_{\varphi e}$ for each $\varphi \in G_{\mathfrak{A}}$ and $e \in X$. It is clear from the definition of $\delta_{\mathfrak{A}} X$ that $\delta^*_{\mathfrak{A}} : G_{\mathfrak{A}} \to G(\delta_{\mathfrak{A}} X)$ given by

$$(\delta^*_{\mathfrak{A}} \varphi) A_e = A_{\varphi e}, \qquad \varphi \in G_{\mathfrak{A}}, \qquad A_e \in \delta_{\mathfrak{A}} X,$$

is a homomorphism. In general $\delta^*_{\mathfrak{A}}$ is neither one-one nor onto.

Let $\mathfrak{A}$ be a complete cover of X. A vertex $x \in X$ is called *regular* if and only if there exist two distinct members $A, B \in \mathfrak{A}$ such that $E(A) \neq \square \neq E(B)$, and $x \in A \cap B$.

(3.5) LEMMA. *Let $\mathfrak{A}$ be a complete cover of X. Then a n.a.s.c. that $\delta^*_{\mathfrak{A}}$ be a monomorphism is that each $A \in \mathfrak{A}$ contain at most one non-regular vertex.*

PROOF. Necessity. Let x, y be two distinct non-regular vertices of A. Then $V(X; x) \cup V(X; y) \subset V(A)$, and hence the transposition (x, y) belongs to Ker $\delta^*_{\mathfrak{A}}$.

Sufficiency. Let $\varphi \in \operatorname{Ker} \delta^*_{\mathfrak{A}}$. Then $\varphi A = A$ for each $A \in \mathfrak{A}$. Let $x \in X$ be regular. Then there exist $A, B \in \mathfrak{A}$, $A \neq B$, such that $x = A \cap B$. Hence $\varphi x = \varphi A \cap \varphi B = A \cap B = x$. By hypothesis it then follows that for each $A \in \mathfrak{A}$, $\varphi | A$ is a permutation of the vertices of A which leaves all but at most one vertex fixed. Hence $\varphi | A = 1$, and therefore $\varphi = 1$.

If $\mathfrak{A}$ is a complete cover of X we denote by $\underline{X}$ the maximal subgraph of X, whose vertices are the regular vertices of X. For $x \in \underline{X}$ let D_x be the maximal subgraph of $\delta_{\mathfrak{A}} X$ with $V(D_x) = \{A \in \mathfrak{A} : x \in A,\ E(A) \neq \square\}$.

(3.6) THEOREM. *Let $\mathfrak{A}$ be a complete cover of X. Then $\mathfrak{D} = \{D_x : x \in \underline{X}\}$ is a complete cover of $\delta_{\mathfrak{A}} X$, and $\delta_{\mathfrak{D}} \delta_{\mathfrak{A}} X \approx \underline{X}$.*

PROOF. It is clear that D_x is a complete subgraph of $\delta_{\mathfrak{A}} X$. Let $\varepsilon = [A, B] \in E(\delta_{\mathfrak{A}} X)$, $A \cap B = x$. Then $A, B \in D_x$, hence $|D_x| \geqq 2$, and $\varepsilon \in D_x$. Hence $\cup \{D_x : x \in \underline{X}\} = \delta_{\mathfrak{A}} X$. If $[A, B] \in D_x \cap D_y$ then $x = A \cap B = y$ and hence $D_x = D_y$. Thus $\mathfrak{D}$ is a complete cover of $\delta_{\mathfrak{A}} X$.

To show that $\delta_{\mathfrak{D}} \delta_{\mathfrak{A}} X \approx \underline{X}$ define $\tau : \delta_{\mathfrak{D}} \delta_{\mathfrak{A}} X \to \underline{X}$ by

$$\tau D_x = x, \qquad D_x \in V(\delta_{\mathfrak{D}} \delta_{\mathfrak{A}} X) = \mathfrak{D}.$$

Clearly τ is well defined, one-one and onto. If $[D_x, D_y] \in E(\delta_{\mathfrak{D}} \delta_{\mathfrak{A}} X)$, then $D_x \cap D_y = A \in \mathfrak{A}$. Hence $x, y \in A$, and since A is complete, $[x, y] \in A$, whence $[x, y] \in \underline{X}$. Thus τ is a monomorphism. Reversal of the argument yields that τ^{-1} is likewise a monomorphism.

$\mathfrak{D}$ will be called the cover of $\delta_{\mathfrak{A}} X$ *induced* by $\mathfrak{A}$.

(3.7) DEFINITION. A complete cover $\mathfrak{A}$ of a graph X is called *uniform* if given any 3-circuit C of X there is an $A \in \mathfrak{A}$ such that $C \subset A$.

(3.8) THEOREM. *If X has a uniform cover $\mathfrak{A}$, then $\mathfrak{A}$ is the only maximal complete cover of X, and hence X is a quasi-derivative. Moreover, the induced cover $\mathfrak{D}$ of $\delta_{\mathfrak{A}} X$ is likewise uniform so that $\delta_{\mathfrak{A}} X$ is also a quasi-derivative.*

PROOF. Let $\mathfrak{B}$ be a complete cover of X and suppose there is a $B \in \mathfrak{B}$ such that $B \not\subset A$ for any $A \in \mathfrak{A}$. Then $|B| \geqq 3$ and there exist at least two

distinct members A_0, A_1 of $\mathfrak{A}$ such that $E(A_i \cap B) \neq \square$, $i=0, 1$. Let $e_i = [x_i, y_i] \in A_i \cap B$, $i=0, 1$. Then $e_0 \neq e_1$. Hence w.l.o.g. $x_0 \neq x_1$. Also, we may assume that if e_0 and e_1 are adjacent, then $y_0 = y_1$. It follows that $C_i = (x_i, y_i, x_{1-i})$ is a 3-circuit of B. Note that if $C_i < A_{(i)} \in \mathfrak{A}$ then $A_{(i)} = A_i$, $i=0, 1$. $[x_0, x_1] \in C_0 \cap C_1$, hence if C_0 and C_1 each belong to some member of $\mathfrak{A}$ then $A_0 = A_1$, a contradiction. It follows that either C_0 or C_1 violates the hypothesis of uniformity.

Suppose that (A, B, C) is a 3-circuit of $\delta_{\mathfrak{A}} X$ which is not contained in any member of $\mathfrak{D}$. Put $A \cap B = x$, $B \cap C = y$, $C \cap A = z$. Then x, y, z are three distinct vertices of X, and since $[x, y] \in B$, $[y, z] \in C$, $[z, x] \in A$, (x, y, z) does not belong to any member of $\mathfrak{A}$ contrary to the uniformity of $\mathfrak{A}$.

4. Even graphs

The importance of complete covers (and quasi-derivatives) lies in their close relationship to a certain class of even graphs. In describing this connection it will be convenient to use the following notation. For a given graph X we define X^2 by

$$V(X^2) = V(X),$$
$$E(X^2) = E(X) \circ E(X) - \Delta,$$

where $\Delta = \{[x, x] : x \in X\}$. That is, $[x, y] \in X^2$ if and only if there is a $z \in X$ such that $[x, z], [z, y] \in X$, and $x \neq y$.

Now let X be a connected even graph. Then $V(X)$ consists of exactly two colour classes M_0, M_1 such that $x, y \in M_\alpha$ implies $[x, y] \notin X$, $\alpha = 0, 1$. Hence X^2 has exactly two components X_0, X_1 given by $V(X_\alpha) = M_\alpha$, $\alpha = 0, 1$. We shall show that with suitable restrictions on X, X_0 and X_1 are quasi-derivatives.

We shall use the following terminology and notation: An even graph X will be called *admissible* if it is connected, and mesh $X \geqq 6$. For a connected even graph X we denote by

(1) Y_α the maximal subgraph of X_α whose vertices are of degree $\geqq 2$ in X, $\alpha = 0, 1$;

(2) $X^{(\alpha)}$ the maximal subgraph of X with $V(X^{(\alpha)}) = V(Y_\alpha) \cup M_{1-\alpha}$, $\alpha = 0, 1$;

(3) N_α the set of all vertices of M_α which belong to some 6-circuit of X, $\alpha = 0, 1$;

(4) $A(x)$ the maximal subgraph of X^2 with $V(A(x)) = V(X; x)$, $x \in X$.

(4.1) Lemma. *Let X be an admissible even graph. If $|X_\alpha| \geqq 2$, then $\mathfrak{A}_\alpha = \{A(y) : y \in Y_{1-\alpha}\}$ is a complete cover of X_α, and $\delta_{\mathfrak{A}_\alpha} X_\alpha \approx Y_{1-\alpha}$, $\alpha = 0, 1$.*

Proof. That each $A(y)$ is complete is clear. Since $d(X; y) \geqq 2$, $E(A(y)) \neq \square$. Let $[x, z] \in X_\alpha$. Then there is a $y \in M_{1-\alpha}$ such that $[x, y], [y, z] \in X$. Hence $y \in Y_{1-\alpha}$, and $[x, z] \in A(y)$. Therefore $X_\alpha = \cup \mathfrak{A}_\alpha$. If $E(A(y) \cap A(y')) \neq \square$, $[x, z] \in A(y) \cap A(y')$, say, then $y = y'$. Otherwise (x, y, z, y') is a 4-circuit of X, and hence mesh $X = 4$, a contradiction.

Define $\tau_\alpha: \delta_{\mathfrak{A}_\alpha} X_\alpha \to Y_{1-\alpha}$ by

$$\tau_\alpha A(y) = y, \qquad A(y) \in V(\delta_{\mathfrak{A}_\alpha} X_\alpha) = \mathfrak{A}_\alpha.$$

Clearly τ_α is well defined, one-one and onto. If $[A(y), A(y')] \in \delta_{\mathfrak{A}_\alpha} X_\alpha$ there is a $z \in A(y) \cap A(y')$, hence $[y, z], [z, y'] \in X$, and since $y \neq y'$, $[y, y'] \in X^2$, i.e., $[y, y'] \in Y_{1-\alpha}$. Thus τ_α is a monomorphism, and, since the preceding argument can be reversed, an isomorphism.

REMARK. If $|X_\alpha| = 1$ we will agree to denote by $\mathfrak{A}_\alpha$ the cover consisting of X_α alone.

Lemma (4.1) has the following converse.

(4.2) LEMMA. *Let X be a connected graph, $\mathfrak{A}$ a complete cover of X. Define $X_\mathfrak{A}$ by*

$$V(X_\mathfrak{A}) = V(X) \cup V(\delta_\mathfrak{A} X),$$

$$E(X_\mathfrak{A}) = \{[x, A] : x \in V(X), A \in \mathfrak{A}, x \in A\}.$$

Then $X_\mathfrak{A}$ is an admissible even graph, and $X_\mathfrak{A}^2 = X + \delta_\mathfrak{A} X$.

PROOF. $V(X)$ and $\mathfrak{A}$ are disjoint. Hence $X_\mathfrak{A}$ is even, $V(X)$ and $\mathfrak{A}$ being the two colour classes of $X_\mathfrak{A}$.

Let $x, y \in X$, $x \neq y$, and let $(x_0, \ldots, x_n)$ be a path of X joining x and y, i.e., $x_0 = x$, $x_n = y$. Put $[x_{i-1}, x_i] = e_i$, $i = 1, \ldots, n$. Then $x_{i-1}, x_i \in A_{e_i} \in \mathfrak{A}$, i.e., $[x_{i-1}, A_{e_i}], [A_{e_i}, x_i] \in X_\mathfrak{A}$. Hence $(x_0, A_{e_1}, x_1, \ldots, x_{n-1}, A_{e_n}, x_n)$ is a path of $X_\mathfrak{A}$ joining x and y. Since any vertex of $X_\mathfrak{A}$ either belongs to $V(X)$ or is adjacent to a vertex of X it follows that $X_\mathfrak{A}$ is connected.

If $X_\mathfrak{A}$ has a 4-circuit (x, A, y, B), then $x, y \in A \cap B$, and since A and B are complete, $[x, y] \in A \cap B$, whence $A = B$, a contradiction. Thus $X_\mathfrak{A}$ is admissible.

Let X_0, X_1 be the maximal subgraphs of $X_\mathfrak{A}^2$ with $V(X_0) = V(X)$, $V(X_1) = \mathfrak{A}$, respectively. $[x, y] \in X_0$ implies the existence of an $A \in \mathfrak{A}$ such that $x, y \in A$. By the completeness of A, $[x, y] \in A < X$. Conversely, if $e = [x, y] \in X$, then $x, y \in A_e \in \mathfrak{A}$, and hence $[x, y] \in X_0$. Thus $X_0 = X$. Similarly it follows that $X_1 = \delta_\mathfrak{A} X$.

(4.3) LEMMA. *Let X be an admissible even graph such that* (i) $d(X; x) < \infty$ *for each* $x \in N_\alpha$, (ii) $d(X; y) \geqq 3$ *for each* $y \in N_{1-\alpha}$. *Then $\mathfrak{A}_\alpha$ is a maximal complete cover of X_α.*

PROOF. Let $\mathfrak{B}_\alpha$ be a complete cover of X_α with $\mathfrak{B}_\alpha > \mathfrak{A}_\alpha$. Then there is a $y \in Y_{1-\alpha}$ and a $B \in \mathfrak{B}_\alpha$ such that $A(y)$ is properly contained in B. Let $z \in V(B) - V(A(y))$. Since B is complete, $[x, z] \in B$ for each $x \in A(y)$. Hence for each $x \in A(y)$ there is a vertex $w_x \in V(X; x) \cap V(X; z) < M_{1-\alpha}$, and $w_x = w_{x'}$ if and only if $x = x'$; otherwise mesh $X = 4$. Since $y \in Y_{1-\alpha}$, $d(X; y) \geqq 2$. Hence for each $x \in A(y)$ there exists an $x' \in A(y)$ such that $(y, x, w_x, z, w_{x'}, x')$ is a 6-circuit of X. By condition (ii), $d(X; w_x) \geqq 3$, $x \in A(y)$. Let $z_x \in V(X; w_x) - \{x, z\}$. Since mesh $X > 4$ no two z_x's are equal; for the same reason $z_x \neq w_{x'}$ for every $x, x' \in A(y)$. $[x, z] \in A(w_x) \cap B$, and since $\mathfrak{B}_\alpha > \mathfrak{A}_\alpha$, $[x, z] \in B_x \cap B$, where $A(w_x) < B_x \in \mathfrak{B}_\alpha$. Hence $B_x = B$, so that $z_x \in A(w_x) < B$. By the com-

pleteness of B, $[z_x, x'] \in B$ for all $x, x' \in A(y)$. Hence there exist vertices $w_{xx} \in V(X; x) \cap V(X; z_{x'})$, $x, x' \in A(y)$, and since mesh $X \geqq 6$, $w_{xx} = w_x$. We also note that if $x \neq x'$, $w_{xx'}$ is distinct from all vertices previously defined, and that no two $w_{xx'}$'s are equal. Each $w_{xx'}$ belongs to a 6-circuit of X, hence by (ii), $d(X; w_{xx'}) \geqq 3$. We let $z_{xx'} \in V(X; w_{xx'}) - \{x, z_{x'}\}$, and repeat the preceding argument obtaining vertices $w_{xx'x''}$, $z_{xx'x''}$, etc.

It follows that $w_x, w_{xx'}, w_{xx'x''}, \ldots \in V(X; x)$; hence $d(X; x)$ is infinite, contrary to hypothesis (i).

(4.4) Remark. Lemma (4.3) becomes false if condition (ii) is omitted. One can, however, show the following: *If X is an admissible even graph such that $d(X; x) \leqq 2$ for each $x \in N_\alpha$, then either $\mathfrak{A}_\alpha$ is a maximal complete cover of X_α, or X is a 6-circuit, and in that case $\mathfrak{A}_\alpha$ is not maximal. On the other hand, if $n \geqq 3$, there exist infinitely many non-isomorphic admissible even graphs X such that* (i) *$d(X; x) \leqq n$ for each $x \in N_\alpha$, with equality for at least one x, and* (ii) *$\mathfrak{A}_\alpha$ is not maximal.*

Proof. Using the notation of the proof of (4.3) we have that $2 \leqq d(X; y) \leqq d(X; z) \leqq 2$. Also, by hypothesis, $d(X; x) = 2$, $x \in A(y)$. Hence either X is a 6-circuit or $d(X; w_x) \geqq 3$ for some $x \in A(y)$. But then $w_x \in V(X; x')$, $x' \in A(y)$, hence $d(X; x') \geqq 3$, a contradiction.

For $n = 3$ an admissible even graph X for which $\mathfrak{A}_\alpha$ fails to be maximal, and which is not a 6-circuit, is given in Fig. 1. M_α is that colour class which contains the vertex x.

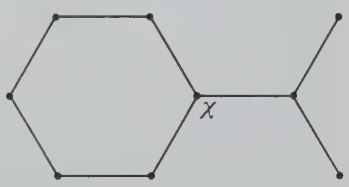


Fig. 1

By concatenation of any finite number of copies of X infinitely many such graphs can be obtained.

We shall now derive conditions for the invariance of $\mathfrak{A}_\alpha$.

Let $G^{(\alpha)}$ be the subgroup of $G(X^{(\alpha)})$ which leaves $M_{1-\alpha}$ invariant. For $\varphi \in G^{(\alpha)}$ define $\varphi_{1-\alpha} = \varphi | M_{1-\alpha}$. Let $[x, y] \in X_{1-\alpha}$. Then there exists a $z \in Y_\alpha$ such that $[x, z], [z, y] \in X^{(\alpha)}$. Hence $[\varphi x, \varphi z], [\varphi z, \varphi y] \in X^{(\alpha)}$, and therefore $[\varphi_{1-\alpha} x, \varphi_{1-\alpha} y] \in X_{1-\alpha}$. Thus $\varphi_{1-\alpha} \in G(X_{1-\alpha})$. It follows that $f_\alpha : G^{(1-\alpha)} \to G(X_\alpha)$ defined by $f_\alpha \varphi = \varphi_\alpha$, $\varphi \in G^{(1-\alpha)}$, is a homomorphism.

(4.5) Lemma. *Let X be an admissible even graph. Then $f_\alpha : G^{(1-\alpha)} \to G(X_\alpha)$ is a monomorphism, $\alpha = 0, 1$.*

Proof. Let $\varphi \in \operatorname{Ker} f_\alpha$. Then $\varphi x = x$ for each $x \in M_\alpha$. Let $y \in Y_{1-\alpha}$. Then $V(X^{(1-\alpha)}; y) \subset M_\alpha$. Hence $V(X; \varphi y) = V(X^{(1-\alpha)}; \varphi y) = \varphi V(X^{(1-\alpha)}; y) = V(X^{(1-\alpha)}; y) = V(X; y)$. Since $d(X; y) = d(X; \varphi y) \geqq 2$, and mesh $X > 4$, $\varphi y = y$. Hence $\varphi = 1$.

(4.6) Lemma. *Let X be an admissible even graph, $|X_\alpha| \geqq 2$. Then a n.a.s.c. that $\mathfrak{A}_\alpha$ be invariant is that $f_\alpha : G^{(1-\alpha)} \approx G(X_\alpha)$*

Proof. Suppose $\mathfrak{A}_\alpha$ is invariant. In view of lemma (4.5) it suffices to show that f_α is onto. Let $\tau \in G(X_\alpha)$, $x \in Y_{1-\alpha}$. By the invariance of $\mathfrak{A}_\alpha$ there is a $w_x \in Y_{1-\alpha}$ such that $A(w_x) = \tau A(x)$. w_x is unique, otherwise mesh $X = 4$.

Define $\varphi: X^{(1-\alpha)} \to X^{(1-\alpha)}$ by

$$\varphi x = \begin{cases} \tau x, & x \in M_\alpha \\ w_x, & x \in Y_{1-\alpha}. \end{cases}$$

Let $[x, y] \in X^{(1-\alpha)}$, $x \in Y_{1-\alpha}$, $y \in M_\alpha$. Then $[\varphi x, \varphi y] = [w_x, \tau y]$. By definition of w_x, $y \in A(x)$ implies $\tau y \in A(w_x)$; hence $[w_x, \tau y] \in X^{(\alpha-1)}$, i.e., $\varphi \in G^{(1-\alpha)}$.

Suppose f_α is an isomorphism. For given $\sigma \in G(X_\alpha)$ put $\tau = (f_\alpha^{-1}\sigma)|Y_{1-\alpha}$. Then $\sigma \mathfrak{A}_\alpha = \{\sigma A(y) : y \in Y_{1-\alpha}\} = \{A(\tau y) : y \in Y_{1-\alpha}\} = \mathfrak{A}_\alpha$. Hence $\mathfrak{A}_\alpha$ is invariant.

Let $e \in X_\alpha$. By $\boldsymbol{K}_e$ denote the set of all complete subgraphs of X_α which contain e. Put $\sup\{|K| : K \in \boldsymbol{K}_e\} = m(e)$, and $\boldsymbol{M}_e = \{K \in \boldsymbol{K}_e : |K| = m(e)\}$. e will be called *exceptional* if and only if $m(e) = 3$ and $|\boldsymbol{M}_e| = 1$; it will be called *singular* if and only if $m(e) = 3$ and $|\boldsymbol{M}_e| \geqq 2$.

By $\overline{C}_4$ denote the graph obtained by dividing each edge of the complete 4-graph C_4 by a new vertex.

Let $e \in X_\alpha$. By y_e we shall denote the unique vertex of $Y_{1-\alpha}$ such that $e \in A(y_e)$.

(4.7) LEMMA. *Let X be an admissible even graph with the property that if $X > Y \approx \overline{C}_4$, then $d(Y; x) = 2$ for each $x \in M_\alpha \cap V(Y)$, and let $e \in X_\alpha$. Then a n.a.s.c. that $\boldsymbol{M}_e$ have a unique maximal element is that e be non-singular. Moreover, if e is non-singular and non-exceptional, then $A(y_e)$ is the maximal element of $\boldsymbol{M}_e$.*

PROOF. The necessity of the condition is immediate from the definition of singularity.

Sufficiency: Assume e_0 to be non-singular. If $m(e_0) = 2$ then $\boldsymbol{K}_{e_0} = \{(e_0)\}$. Also, $d(X; y_{e_0}) = 2$, and hence $A(y_{e_0}) = (e_0)$. If $m(e_0) = 3$, then e_0 is exceptional, and the assertion follows at once from the definition of exceptionality. If $m(e_0) \geqq 4$ let $K \in \boldsymbol{K}_{e_0}$ with $|K| = 4$ be given. Since mesh $X > 4$ only two possibilities can arise. Either $y_e = y_{e_0}$ for each $e \in K$, and then $K \subset A(y_{e_0})$, or else all y_e's are distinct. But in the latter case the graph Y with

$$V(Y) = V(K) \cup \{y_e : e \in K\},$$
$$E(Y) = \{[x, y_e] : x \in K, e \in K, e \in E(K; x)\},$$

is isomorphic to $\overline{C}_4$ and violates the hypothesis of the lemma.

A vertex $x \in X_\alpha$ will be called *singular* if it belongs to a 3-circuit C such that either C contains a singular edge or all three edges of C are exceptional. If x belongs to a 3-circuit with edges e_1, e_2, e_3 such that e_1, e_2 are exceptional, e_3 is singular, and $x = e_1 \cap e_2$, then x is called *exceptional*. Note that every exceptional vertex is singular.

By Q we denote the graph with $V(Q) = \{0, 1, 2, 3\}$, $E(Q) = \{[0, i] : i = 1, 2, 3\} \cup \{[1, 2]\}$.

(4.8) THEOREM. *Let X be an admissible even graph such that* (i) *X satisfies the hypothesis of lemma* (4.7), *and* (ii) *$d(X; x) \leqq 2$ for each singular vertex $x \in X_\alpha$. Suppose that X_α is not isomorphic to C_3, ∂Q, $\partial^2 Q$, ∂C_4, and has a complete cover $\mathfrak{A}$ such that* (1) *if e is a non-exceptional edge of X_α then A_e is*

a maximal element of $\boldsymbol{M}_e$; (2) *if* $e \in X_\alpha$ *is exceptional,* $\boldsymbol{M}_e = \{C\}$, *then* $A_e = C$ *if all edges of* C *are exceptional*; (3) *if* x *is a singular or exceptional vertex of* X_α *then* x *belongs to at most two distinct members of* $\mathfrak{A}$. *Then* $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_\alpha$.

PROOF. Let $e \in X_\alpha$. We must show that $A_e = A(y_e)$. If e is non-singular and non-exceptional this follows from lemma (4.7). It thus remains to consider two cases.

Case (i): $e = [x, y]$ is singular. Let $C_i = (x, y, x_i)$, $i = 0, 1$, be two distinct members of $\boldsymbol{M}_e$. Put $e_{xi} = [x, x_i]$, $e_{yi} = [y, x_i]$, $i = 0, 1$. Then, without loss of generality, $y_e = y_{e_{x0}} = y_{e_{y0}}$, while $y_e, y_{e_{x1}}, y_{e_{y1}}$ are distinct. This follows from the fact that the members of each triple $(y_e, y_{e_{xi}}, y_{e_{yi}})$, $i = 0, 1$, are either all equal or all distinct. If $y_e = y_{e_{xi}} = y_{e_{yi}}$, $i = 0, 1$, then $m(e) \geqq 4$, a contradiction against the singularity of e; if all five y's are distinct, then $d(X; x) \geqq 3$, contrary to hypothesis (ii).

Now assume that $A_e \neq A(y_e)$, i.e., $A_e = C_1$. Note that $P = C_0 \cup C_1 \approx \partial Q$. Hence $E(X_\alpha) - E(P) \neq \square$. This implies that $E = E(X_\alpha; x) \cup E(X_\alpha; y) - E(P) \neq \square$. For if $E = \square$, then e_{x0} and e_{y0} are exceptional, and $A_{e_{x0}} = e_{x0}$, $A_{e_{y0}} = e_{y0}$. Consequently, x_0 is an exceptional vertex of X_α, and by (3), $A_{e_{x0}}$ and $A_{e_{y0}}$ are the only members of A containing x_0, i.e., $V(X_\alpha; x_0) = \{x, y\}$. It follows that there is an $e' \in E(X_\alpha; x_1) - E(P)$. If $e' = [x_1, w]$, then $w \notin P$. Otherwise $w = x_0$, and then $P \cup e'$ is a complete 4-graph containing e, contrary to the singularity of e.

Since $d(X; x) = 2$ it follows that $y_{e'} = y_{e_{x1}}$ or $y_{e_{y1}}$, say $y_{e'} = y_{e_{x1}}$. But then $[x, w] \in A(y_{e_{x1}})$, and since $w \notin P$, $E(X_\alpha; x) - E(P) \neq \square$, a contradiction. Hence there exists an edge $e' = [x, y'] \in X_\alpha$ such that $y' \notin P$. By the same argument as before, $y_{e'} = y_{e_{x1}}$. Note that $d(X; y_{e'}) = 3$, for if $d(X; y_{e'}) \geqq 4$ then $A_{e'} = A(y_{e'})$, and hence $e_{x1} \in A_{e'} \cap A_e$, a contradiction. From $y_{e'} = y_{e_{x1}}$ it also follows that $[x_1, y'] \in E(X_\alpha)$.

Now consider $[x_0, y']$. If $[x_0, y'] \notin X_\alpha$, then C_1, A_{e_x} and $A_{e'}$ are three distinct members of $\mathfrak{A}$ containing x, contrary to hypothesis (3). Hence $[x_0, y'] \in X_\alpha$. As none of the four edges e, e', e_{x0}, e_{x1} is contained in a complete 4-graph, it follows that the maximal subgraph R of X_α with vertices x, y, x_0, x_1, y' is isomorphic to $\partial^2 Q$. By hypothesis there is a $z \in V(X_\alpha) - V(R)$ adjacent to some vertex of R.

If $[x, z] \in X_\alpha$ then either $d(X; y_e) \geqq 4$ or $d(X; y_{e'}) \geqq 4$ or $d(X; x) \geqq 3$, none of which can happen. Hence z is not adjacent to x; without loss of generality we may assume that it is adjacent to y. Put $[y, z] = e''$. Since y is singular and $d(X; y) = 2$, $y_{e''} = y_{e_{y1}}$ and $d(X; y_{e''}) = 3$. By an argument of the same type as in the preceding paragraphs one then shows that the maximal subgraph S of X_α with $V(S) = \{x, y, z, x_0, x_1, y'\}$ is isomorphic to ∂C_4, and that that part of $\mathfrak{A}$ which covers S consists of C_1, (x, x_0, y'), (x_0, y, z) and (x_1, y', z). Since $X_\alpha \not\approx \partial C_4$, there exists a $w \in V(X_\alpha) - V(S)$ adjacent to some vertex of S. $G(\partial C_4)$ acting transitively on $V(\partial C_4)$ we may assume that $e_w = [w, x] \in X_\alpha$. $d(X; x) \leqq 2$ implies $y_{e_w} = y_e$ or $y_{e'}$, say $y_{e_w} = y_e$, but then $d(X; y_e) \geqq 4$, a contradiction. Hence $A_e = A(y_e)$ as was to be shown.

Case (ii): $e=[x, y]$ is exceptional. Let $C=(x, y, z)$ be the unique 3-circuit containing e, and put $[x, z]=e_x$, $[y, z]=e_y$. $X_\alpha \not\approx C_3$ implies that there is a vertex $w\in V(X_\alpha)-V(C)$ which is adjacent to some vertex of C.

If e_x (or e_y) is non-exceptional then by the earlier parts of the proof $A_{e_x}=A(y_{e_x})$. If $y_{e_x}=y_e$, then $e\in A(y_e)=A(y_{e_x})=A_{e_x}$, and hence $A_e=A(y_e)$. If $y_{e_x}\neq y_e$, then $d(X; y_e)=2$, hence $A(y_e)=e$. Also, since $A_{e_x}=A(y_{e_x})\neq C$, $A_e=e$. Hence again $A_e=A(y_e)$.

We may therefore suppose that the three edges e, e_x, e_y are exceptional. Without loss of generality $e'=[w, x]\in X_\alpha$. There are now two possibilities. Either y_e, y_{e_x}, y_{e_y} are distinct or $y_e=y_{e_x}=y_{e_y}$. In the first case the fact that x is singular implies that $y_{e'}=y_e$ or y_{e_x}, say $y_{e'}=y_e$. But then $w, x, y\in V(X; y_e)$ and hence (w, x, y) is a 3-circuit containing e so that e is non-exceptional, a contradiction. It follows that $y_e=y_{e_x}=y_{e_y}$, i.e., $A(y_e)=C$. But by hypothesis (2), $A_e=C$ whence $A_e=A(y_e)$ in this case also.

(4.9) COROLLARY. *If X, X_α and $\mathfrak{A}_\alpha$ satisfy the hypotheses of theorem* (4.8), *then $\mathfrak{A}_\alpha$ is maximal and invariant, and hence X_α is a quasi-derivative with respect to $\mathfrak{A}_\alpha$.*

5. Derivatives

We shall now derive Whitney's theorem from theorem (4.8). Let X be any connected graph with $E(X)\neq\square$. Let $\mathfrak{T}$ be the trivial cover of X and put $\overline{X}=X_{\mathfrak{T}}$ (notation of lemma (4.2)). That is to say,

$$V(\overline{X})=V(X)\cup E(X),$$
$$E(\overline{X})=\{[e, x]: e\in E(X; x)\}.$$

By (4.2), $\overline{X}$ is an admissible even graph, and if we denote by $\overline{X}_0$ and $\overline{X}_1$ the two components of $\overline{X}^2$ with $V(\overline{X}_0)=V(X)$ and $V(\overline{X}_1)=E(X)$, respectively, then $\overline{X}_0=X$ and $\overline{X}_1=\delta_{\mathfrak{T}}X=\partial X$. Note that if $e=[x, y]\in E(X)$ then $V(\overline{X}; e)=\{x, y\}$, hence $d(\overline{X}; e)=2$ for each $e\in E(X)$.

Let $\mathfrak{E}$ be the complete cover of ∂X induced by the trivial cover of X. $\mathfrak{E}$ will henceforth be called the *natural* cover of ∂X. If we denote by $\underline{X}$ the maximal subgraph of X with $V(\underline{X})=\{x\in X: d(X; x)\geqq 2\}$, (i.e., the subgraph of X whose vertices are regular w.r.t. the trivial cover), then $\mathfrak{E}=\{E_x: x\in\underline{X}\}$, where E_x denotes the maximal subgraph of ∂X with $V(E_x)=E(X; x)$. For $\varepsilon\in E(\partial X)$ we shall denote by E_ε that member of $\mathfrak{E}$ which contains ε. $\mathfrak{E}$ has the following properties:

(5.1) (i) *If $e=[x, y]\in V(\partial X)$ and if $d(X; x)\geqq 2$, $d(X; y)\geqq 2$, then E_x and E_y are the only members of $\mathfrak{E}$ containing e.*

(ii) *If $e=[x, y]\in V(\partial X)$ and if $d(X; x)\geqq 2$, $d(X; y)=1$, then E_x is the only member of $\mathfrak{E}$ containing e. Thus e is regular with respect to $\mathfrak{E}$ if and only if both ends of e are of degree $\geqq 2$.*

(iii) *If $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ are three exceptional edges of ∂X forming a 3-circuit C of ∂X, then either $\partial X=C$ or $E_{\varepsilon_i}=C$, $i=1, 2, 3$.*

PROOF of (iii). If $\partial X \neq C$ there is an $\varepsilon_0 \in \partial X$ adjacent to both ε_1 and ε_2, say. If $E_{\varepsilon_i} \neq C$, then $E_{\varepsilon_i} = \varepsilon_i$, $i = 1, 2$, and then the vertex common to ε_0, ε_1, ε_2 belongs to three distinct members of $\mathfrak{E}$, viz. E_{ι_0}, (ε_1), (ε_2), a contradiction.

It follows that if ∂X is not isomorphic to C_3, ∂Q, $\partial^2 Q$, or ∂C_4, then theorem (4.8) is applicable to $\overline{X}$ for $\alpha = 1$ with the result that $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{E}$ is maximal, and the only complete cover of ∂X with the property that each vertex of ∂X belongs to at most two members of $\mathfrak{E}$. As a consequence, if X and X' are two connected graphs subject to the above restrictions, if $\mathfrak{E}$ and $\mathfrak{E}'$ are the natural covers of ∂X and $\partial X'$, respectively, and if $\eta : \partial X \approx \partial X'$, then $\mathfrak{E}' = \eta \mathfrak{E}$, and hence $\delta_{\mathfrak{E}} \partial X \approx \delta_{\mathfrak{E}'} \partial X'$, i.e., $\underline{X} \approx \underline{X}'$. This is easily used to prove the following theorem.

(5.2) THEOREM. *Let X and X' be two non-empty connected graphs neither of which is isomorphic to C_3. Then $\partial X \approx \partial X'$ implies $X \approx X'$.*

PROOF. It is easily shown that the theorem holds for the exceptional graphs C_4, Q, ∂Q (C_3 is excluded by hypothesis). In fact, as regards C_4, one can show that it is the only connected graph whose derivative has only singular edges. We omit the proof.

Suppose then that X is none of the exceptional graphs C_4, Q, ∂Q. If $d(X; x) = 1$ denote by e_x the edge of X incident with x. Then e_x is a non-regular vertex of ∂X; hence ηe_x is a non-regular vertex of $\partial X'$. Thus there exists a unique vertex $x'_{\eta e_x} \in X'$ such that $E(X'; x'_{\eta e_x}) = \{\eta e_x\}$.

Let $\sigma : \underline{X} \approx \underline{X}'$ be the isomorphism induced by η. σ can be extended to an isomorphism $\tau : X \approx X'$ by setting

$$\tau x = \begin{cases} \sigma x, & \text{if} \quad d(X; x) \geqq 2 \\ x'_{\eta e_x}, & \text{if} \quad d(X; x) = 1 . \end{cases}$$

This completes the proof.

(5.3) THEOREM. *Let X be a connected graph not isomorphic to C_2, C_4, Q, ∂Q. Then $\partial^* : G(X) \to G(\partial X)$ given by*

$$\partial^* \varphi = \tilde{\varphi}, \qquad \varphi \in G(X),$$

is an isomorphism.

PROOF. If $|X| \leqq 1$, then $\partial X = \square$, and hence $G(X) = G(\partial X) = 1$. If $|X| = 2$, i.e., if $X \approx C_2$, then $|\partial X| = 1$, hence $G(\partial X) = 1$. If $X \approx C_4$, Q, ∂Q, then ∂^* is a monomorphism, and Im ∂^* is of index 2 in $G(\partial X)$.

If X is none of these graphs then by (4.5), $f_1 : \overline{G}^{(0)} \approx G(\partial X)$, where $\overline{G}^{(0)}$ is the subgroup of $G(\overline{X}^{(0)})$ which leaves $\overline{M}_1 = E(X)$ invariant, and $\overline{X}^{(0)}$ is the maximal subgraph of $\overline{X}$ with $V(\overline{X}^{(0)})$ consisting of $E(X)$ together with all vertices of X which are of degree $\geqq 2$.

$\overline{X}$ is obtained from X by subdividing each edge by a new vertex. Hence either (i) $h : G(X) \approx G(\overline{X})$, where $(h\varphi)x = \varphi x$, $x \in V(X)$, $(h\varphi)e = \tilde{\varphi} e$, $e \in E(X)$, or (ii) X is an n-circuit.

In case (i), $g : G(\overline{X}) \to \overline{G}^{(0)}$ given by $g\psi = \psi | \overline{X}^{(0)}$, $\psi \in G(\overline{X})$, is an isomorphism. Every $\psi \in G(\overline{X})$ leaves $E(X)$ invariant; hence so does $g\psi$. Let $\lfloor e, x \rceil \in \overline{X}^{(0)}$.

Then $d(X; x) \geqq 2$, $e \in E(X; x)$. Hence $\tilde{\varphi} e \in E(X; \varphi x)$, $d(X; \varphi x) \geqq 2$, where $\varphi = h^{-1}\psi$, and therefore $(g\psi)[e, x] = [\tilde{\varphi} e, \varphi x] \in \overline{X}^{(0)}$. Hence $g\psi \in \overline{G}^{(0)}$.

Let $\psi \in \operatorname{Ker} g$, $\varphi = h^{-1}\psi$. Then $\tilde{\varphi} e = e$ for each $e \in E(X)$, and $\varphi x = x$ for each $x \in X$ with $d(X; x) \geqq 2$. Now suppose $d(X; x) = 1$. In the notation of the proof of (5.2), $E(\overline{X}; x) = \{[e_x, x]\}$. Hence $E(\overline{X}; \psi x) = \{[\tilde{\varphi} e_x, \varphi x]\} = \{[e_x, \psi x]\}$, and therefore $\psi x = x$. Thus g is a monomorphism. To see that g is onto let $\tau \in \overline{G}^{(0)}$ be given and define $\psi \in G(\overline{X})$ by

$$\psi e = \tau e, \quad \text{if} \quad e \in E(X)$$

$$\psi x = \begin{cases} \tau x, & \text{if} \quad d(X; x) \geqq 2, \quad x \in V(X) \\ x_{\tau e_x}, & \text{if} \quad d(X; x) = 1, \quad x \in V(X). \end{cases}$$

Combining the three isomorphisms f_1, g, h we obtain that $f_1 g h\colon G(X) \approx G(\partial X)$, and $f_1 g h = \partial^*$.

In case (ii), $\overline{X} = \overline{X}^{(0)}$ is a $2n$-circuit, and, with h as defined in case (i), $h\colon G(X) \approx \overline{G}^{(0)}$. Hence $f_1 h\colon G(X) \approx G(\partial X)$, and $f_1 h = \partial^*$.

6. Representation of graphs by joins of complete graphs

In this section we slightly modify and thereby extend to infinite graphs a device which was introduced by IZBICKI [1] strictly for finite graphs. We will show that, in the terminology of [1], every graph has a minimal V-representation (lemma (6.5)).

(6.1) DEFINITION. Let Y be a graph, $\{X_y : y \in Y\}$ a collection of graphs indexed by $V(Y)$. By the Y-*join* of the X_y's is meant the graph $X = \vee(X_y; Y)$ given by

$$V(X) = \{(x, y) : x \in X_y, \ y \in Y\},$$

$$E(X) = \{[(x, y), (x', y')] : [y, y'] \in Y, \text{ or } y = y' \text{ and } [x, x'] \in X_y\}.$$

Note that if $X_y \approx X_0$ for each $y \in Y$, then $X \approx Y \circ X_0$, the lexicographic product of Y and X_0 ([3], definition 2).

We shall be concerned with the case where Y is connected and each X_y is complete, i.e., $X_y \approx C_{n_y}$, $n_y \geqq 1$.

(6.2) DEFINITION. By a *representation* of a graph X is meant a collection of graphs $R = (Y; C_{n_y} : y \in Y)$, where C_{n_y} is the complete n_y-graph, $n_y \geqq 1$, and $X \approx \vee(C_{n_y}; Y)$. Two representations $R = (Y; C_{n_y} : y \in Y)$ and $S = (Z; C_{m_z} : z \in Z)$ of X are *isomorphic* if and only if $Y \approx Z$. R and S are *equivalent* if and only if $\eta\colon Y \approx Z$, and $m_{\eta y} = n_y$ for each $y \in Y$. R is *trivial* if $n_y = 1$ for each $y \in Y$.

Note that any two trivial representations of X are equivalent.

(6.3) DEFINITION. Let X be a graph. Define an equivalence relation on $V(X)$ by setting $x \sim y$ if and only if $V(X; x) \cup \{x\} = V(X; y) \cup \{y\}$. For each $x \in X$ put $x_* = \{y \in X : y \sim x\}$, and by X_* denote the graph with

$$V(X_*) = \{x_* : x \in X\},$$

$$E(X_*) = \{[x_*, y_*] : x_* \neq y_*, \quad [x, y] \in E(X)\}.$$

(6.4) LEMMA. *Let X be a graph. Then* (i) *there is a subgraph Y of X such that $Y \approx X_*$;* (ii) $X_{**} \approx X_*$; (iii) $X_* \approx X$ *if and only if* $x_* = \{x\}$ *for each* $x \in X$; (iv) $\sim$ *is invariant under isomorphisms.*

PROOF. $[x_*, y_*] \in X_*$ implies $[x, y] \in X$. For by the definition of X_*, $[x', y'] \in X$ for some $x' \in x_*$, $y' \in y_*$. Hence $y' \in V(X; x') \subset V(X; x') \cup \{x'\} = V(X; x) \cup \{x\}$, and since $y' \neq x$, $y' \in V(X; x)$. But then $x \in V(X; y') \subset V(X; y') \cup \{y'\} = V(X; y) \cup \{y\}$, and therefore $x \in V(X; y)$.

Now denote the vertices of X_* by w_a, $a \in A$. For each $a \in A$ choose a fixed element $x_a \in w_a$, and define $\sigma: X_* \to X$ by $\sigma w_a = x_a$. By the preceding paragraph σ is a monomorphism, proving (i).

Let $y \in x_*$. Then $V(X; x) \cup \{x\} = V(X; y) \cup \{y\}$. Hence either $x = y$ or $y \in V(X; x)$. Therefore $x_* \subset V(X; x) \cup \{x\}$. It follows that

$$V(X; x) \cup \{x\} = \cup \{z_*: z_* \in V(X_*; x_*) \cup \{x_*\}\}.$$

Hence $x_* \sim y_*$ implies $x \sim y$, i.e., $x_* = y_*$. Thus the natural projection $X_* \to X_{**}$ is an isomorphism. This proves (ii).

(iii) follows immediately from (ii). (iv) is obvious.

(6.5) LEMMA. *Let X be a graph. Then $R_0 = (X_*; C_{|x_*|}: x_* \in X_*)$ is a representation of X. It is minimal in the sense that if $R = (Y; C_{n_y}: y \in Y)$ is any representation of X, then X_* is isomorphic to a subgraph of Y.*

PROOF. It follows from the proof of (6.4) (ii) that for each $x \in X$ the maximal subgraph M_x of X with $V(M_x) = x_*$ is complete. This, together with the fact that $[x_*, y_*] \in X_*$ implies $[x, y] \in X$, proves the first part of the lemma. To prove the second part consider $X = \vee (C_{n_y}; Y)$, and define an equivalence $\sim_R$ on $V(X)$ by setting $(\alpha, y) \sim_R (\alpha', y')$ if and only if $y = y'$. Then it is immediate from (6.1) that for each $(\alpha, y) \in X$, $\{(\beta, z) \in X: (\beta, z) \sim_R (\alpha, y)\} \subset (\alpha, y)_*$. Denote the vertices of X_* by w_a, $a \in A$. For each class $w_a = (\alpha, y)_*$ choose a fixed $y_a \subset Y$ such that $(\alpha_a, y_a) \in w_a$ for some α_a. Define $\sigma: X_* \to Y$ by $\sigma w_a = y_a$, $a \in A$. Then it is easily checked that σ is a monomorphism.

(6.6) COROLLARY. *A n.a.s.c. that $X \approx X_*$ is that all representations of X be trivial.*

(6.7) LEMMA. *Let $R = (Y; C_{n_y}: y \in Y)$ be a representation of X. Then $X_* \approx Y_*$.*

PROOF. Let $X = \vee (C_{n_y}; Y)$, $(\alpha, y) \in X$. Using the fact that

$$V(X; (\alpha, y)) \cup \{(\alpha, y)\} = \{(\beta, z) \in X: z \in V(Y; y) \cup \{y\}\}$$

one easily checks that

$$(\alpha, y)_* = \{(\alpha', y') \in X: y' \in y_*\}.$$

Hence $\tau: X_* \to Y_*$ given by $\tau((\alpha, y)_*) = y_*$, $(\alpha, y)_* \in X_*$, is an isomorphism.

(6.8) LEMMA. *Let $R = (Y; C_{n_y}: y \in Y)$ be a representation of X. If R and $R_0 = (X_*; C_{|x_*|}: x_* \in X_*)$ are isomorphic, then they are equivalent.*

PROOF. By (6.2) there is an isomorphism $\tau: X \approx V(C_{n_y}; Y)$. Since $\sim$ is invariant under isomorphisms it follows that $(\tau x)_* = \tau x_*$ for each $x \in X$. By the proof of (6.7), $\tau_*: X_* \approx Y_*$, where $\tau_* x_* = y_*$, and y is defined by $\tau x = (\alpha, y)$. $X_* \approx Y$ implies $Y_* \approx Y$. Hence by (6.4) (iii), τ_* can be continued to an isomorphism $\sigma: X_* \approx Y$ defined by $\sigma x_* = y$. Therefore $n_{\sigma x_*} = n_y = |(\alpha, y)_*| = |\tau x_*| = |x_*|$.

(6.9) LEMMA. *Let $\mathfrak{A} = \{A_e: e \in X\}$ be a complete cover of X. Then a n.a.s.c. that $X_* \approx X$ is that X contain no edge $e = [x, y]$ such that $V(X; x) - V(A_e) = V(X; y) - V(A_e)$. If $\mathfrak{A}$ is invariant, $e = [x, y] \in X$ is such that $x \sim y$, and if $e' \in E(X; x) \cup E(X; y)$, then $A_{e'} = A_e$ or $A_{e'} = e'$.*

PROOF. For any edge $e = [x, y] \in X$, $\big(V(X; x) \cup \{x\}\big) \cap V(A_e) = V(A_e)$.

To prove the second part of the lemma suppose that $e' = [x, y'] \notin A_e$ and $A_{e'} \neq e'$. Then there is a $z \in V(X; x)$ with $[y', z] \in A_{e'}$. $z \neq y$, otherwise $A_{e'} = A_e$. Let τ be the transposition (x, y). Since $x \sim y$, $\tau \in G(X)$. $[y', z] \in A_{e'} \cap A_{\tau e'}$, hence $A_{e'} = A_{\tau e'}$. Therefore $\tau e' = [y, y'] \in A_{e'}$, and hence $e \in A_{e'}$, a contradiction.

(6.10) COROLLARY. *If X is a quasi-derivative relative to the cover $\mathfrak{A}$, and if $x \in X$, there exists an $A \in \mathfrak{A}$ such that $x_* \subset V(A)$. This inclusion is proper if and only if X is not complete.*

PROOF. If $|x_*| = 1$ the statement is trivial, since by the maximality of $\mathfrak{A}$ either $|X| = 1$ or $|A| \geqq 2$ for each $A \in \mathfrak{A}$.

If $|x_*| \geqq 2$ let x, y be two distinct elements of x_*, e_0 the edge $[x, y]$. We claim that $x_* \subset V(A_{e_0})$. If not, let $z \in x_* - V(A_{e_0})$ and put $e_z = [x, z]$. $e_z \notin A_{e_0}$, hence by (6.9), $A_{e_z} = e_z$. Since A_{e_0} is complete, $V(A_{e_0}) \subset V(X; x) \cup \{x\}$ and therefore $V(A_{e_0}) \subset V(X; z)$. For $a \in A_{e_0}$ let $e_a = [a, z]$. $x \sim z$, $e_a \in E(X; z)$; hence by (6.9) either $A_{e_a} = e_a$ or $A_{e_a} = A_{e_z} = e_z$, but that is possible only when $a = z$. Hence $A_{e_a} = e_a$ for each $a \in A_{e_0}$. But then $B_0 = A_{e_0} \cup \bigcup \{(e_a): a \in A_{e_0}\}$ is complete, and $|B_0 \cap A_e| \leqq 1$ for each $e \notin B_0$. Put $B_e = B_0$ if $e \in B_0$, $B_e = A_e$ otherwise. Then $\mathfrak{B} = \{B_e: e \in X\}$ is a complete cover of X, and $\mathfrak{B} > \mathfrak{A}$, a contradiction. Hence $x_* \subset V(A_{e_0})$.

If X is complete, then $X = A_{e_0}$ and hence $x_* = V(A_{e_0})$.

If $x_* = V(A_{e_0})$ and X is not complete let $z \in V(X) - V(A_{e_0})$ be adjacent to some $a \in A_{e_0}$. Then $V(A_{e_0}) \subset V(X; z)$ and the argument of the preceding paragraph can be repeated, again leading to a contradiction.

(6.11) THEOREM. *Let X be a graph without isolated vertices. Then a n.a.s.c. that $(\partial X)_* \approx \partial X$ is that X have the following properties:* (i) *no vertex of X is adjacent to two distinct vertices of degree* 1; (ii) *no two vertices of degree* 2 *belong to a* 3*-circuit of X.*

PROOF. Necessity: Recall from (5.1) (ii) that a vertex e of ∂X is non-regular with respect to the natural cover $\mathfrak{E}$ if and only if e is incident with a vertex of degree 1 of X. Consequently, if e and e' are each incident with a vertex of degree 1, then $e \sim e'$. This proves the necessity of condition (i).

Let (x, y, z) be a 3-circuit of X such that $d(X; x) = d(X; y) = 2$. Put $[x, y] = e_x$, $[y, z] = e_y$, $[z, x] = e_z$. Then $\varepsilon = [e_y, e_z] \in E(\partial X)$, and $V(\partial X; e_y) -$

$V(E_\varepsilon)=V(\partial X; e_z)-V(E_\varepsilon)=\{e_x\}$. Hence by (6.9), $(\partial X)_*$ and ∂X are not isomorphic.

Sufficiency: Without loss of generality we may assume that X is connected. If X is one of the exceptional graphs C_3, C_4, Q, ∂Q the sufficiency of conditions (i) and (ii) can easily be verified directly. Suppose, then, that X is none of the exceptional graphs, and that e_0, e_1 are two distinct vertices of ∂X with $e_0 \sim e_1$. Then $\varepsilon=[e_0, e_1]\in E(\partial X)$, i.e., $e_i=[x, x_i]$, $i=0, 1$, $x_0 \neq x_1$. If $\partial X=(\varepsilon)$, then $X=(e_0)\cup(e_1)$, and hence $d(X; x_i)=1$, $i=0, 1$, so that x violates hypothesis (i). Hence $\partial X \neq (\varepsilon)$, i.e., $A_i=E(\partial X; e_i)-\{\varepsilon\} \neq \square$, $i=0$ or 1. By (6.9) there is at most one $\varepsilon' \in A_i$ such that $\varepsilon' \notin E_\varepsilon$; otherwise e_i would belong to more than two members of $\mathfrak{E}$ which is impossible. By condition (i) at least one of e_0 and e_1 is regular, say e_0. Hence there is exactly one $\varepsilon_0=[e_0, e_2]\in A_0$ with $E_{\varepsilon_0}=\varepsilon_0$. Since $e_0 \sim e_1$, $\varepsilon_1=[e_1, e_2]\in E(\partial X)$. But $E_{\varepsilon_1}=\varepsilon_1$, otherwise $E_{\varepsilon_1}=E_\varepsilon$ and then $\varepsilon_0 \in E_\varepsilon$, a contradiction. Hence

$$E(\partial X; e_2)=\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}, \tag{1}$$

otherwise, e_2 belongs to more than two members of $\mathfrak{E}$. Therefore $x_i=e_i \cap e_2$, $i=0, 1$, and (x, x_0, x_1) form a 3-circuit of X. By (1), $d(X; x_i)=2$, $i=0, 1$, contrary to hypothesis (ii).

7. The derivative of graphs with multiple edges

The purpose of this section is to prove a theorem similar to (5.2) for graphs with multiple edges. The derivatives of such graphs are not quasi-derivatives, and while this prevents direct application of the results of section 4 the quotient operation introduced in section 6 makes it possible to reduce derivatives of graphs with multiple edges to derivatives of simple graphs.

In this section we shall mean by a graph a triple $X=(V(X), E(X), f_X)$, where $V(X)$ and $E(X)$ are any two disjoint sets, and f_X is a function of $E(X)$ into the set of unordered pairs of distinct elements of $V(X)$. If f_X is one-one X is called *simple*; any simple graph may be regarded as a graph in the sense of section 1. We shall say two edges $e_1, e_2 \in E(X)$ are *adjacent* if and only if $e_1 \neq e_2$ and the two pairs $f_X e_1$ and $f_X e_2$ have a common element. We define the *derivative* of X exactly as in section 1, and note that ∂X is a simple graph [7]).

It is clear that every graph contains a maximal simple subgraph, and that any two maximal simple subgraphs of X are isomorphic.

(7.1) Lemma. *Let X be a graph, Y a maximal simple subgraph of X. For $e\in E(Y)$ let $m_e=|f_X^{-1} f_Y e|$. Then $R=(\partial Y; C_{m_e}: e\in \partial Y)$ is a representation of ∂X.*

Proof. Put $\vee(C_{m_e}; \partial Y)=Z$. For each $e\in \partial Y$ let τ_e be a one-one function of $V(C_{m_e})$ onto $f_X^{-1} f_Y e$. Define $\varrho: Z \to \partial X$ by $\varrho(\alpha, e)=\tau_e \alpha$, $\alpha \in C_{m_e}$, $e\in \partial Y$. Clearly ϱ is onto. By definition $\tau_e \alpha \in f_X^{-1} f_Y e$. Hence if $\tau_e \alpha=\tau_{e'} \alpha'$, then $f_X^{-1} f_Y e=f_X^{-1} f_Y e'$, and therefore $e=e'$. Thus ϱ is one-one. Let $[(\alpha, e), (\alpha', e')]\in Z$. If $e=e'$, then $[\alpha, \alpha']\in C_{m_e}$, i.e., $\alpha \neq \alpha'$. Hence $\tau_e \alpha \neq \tau_e \alpha'$, and since both

[7]) This differs from the definition given in [2].

edges belong to $f_X^{-1}f_Y e$, $[\tau_e\alpha, \tau_e\alpha'] \in \partial X$. If $e \neq e'$, then $[e, e'] \in \partial Y$, hence again $[\tau_e\alpha, \tau_{e'}\alpha'] \in \partial X$. It follows that ϱ is a homomorphism. The proof that ϱ^{-1} is a homomorphism is similar.

(7.2) COROLLARY. *Let X be a graph, Y a maximal simple subgraph of X. Then $(\partial X)_* \approx (\partial Y)_*$.*

PROOF. (7.1), (6.7).

(7.3) LEMMA. *Let Y be a simple graph, $R = (\partial Y; C_{n_e}: e \in \partial Y)$ a representation of X. Then there is a graph X_R such that* (i) $\partial X_R \approx X$, (ii) *Y is a maximal simple subgraph of X_R, and* (iii) *for each $e \in \partial Y$, $|f_{X_R}^{-1} f_Y e| = n_e$. If $R = (\partial Y; C_{n_e}: e \in \partial Y)$ and $S = (\partial Z; C_{m_e}: e \in \partial Z)$ are two representations of X with Y and Z simple, then a n.a.s.c. that $X_R \approx X_S$ is that R and S be equivalent.*

PROOF. For each $e \in E(Y)$ let A_e be a set disjoint from $V(Y)$ such that (1) $e \in A_e$, (2) $|A_e| = n_e$, and (3) $A_e \cap A_{e'} = \square$ if $e \neq e'$. Define X_R by $V(X_R) = V(Y)$, $E(X_R) = \cup \{A_e: e \in E(Y)\}$, $f_{X_R} a = f_Y e$, where $a \in A_e$, $e \in E(Y)$. Then (i), (ii), (iii) are immediate from the construction of X_R.

As for the second part of the lemma, sufficiency is obvious. To prove necessity assume $\eta: X_R \approx X_S$. Then $\eta: Y \approx Z$ and $n_e = |f_{X_R}^{-1} f_Y e| = |f_{X_S}^{-1} f_Y \eta e| = m_{\eta e}$, $e \in E(Y)$. Thus R and S are equivalent.

It follows from the preceding sequence of lemmas that the problem of determining for a given graph X the collection of all non-isomorphic graphs X_α with $\partial X_\alpha \approx \partial X$ is equivalent with the problem of determining all inequivalent representations $R_\alpha = (\partial Z_\alpha; C_{n_e}: e \in \partial Z_\alpha)$ of ∂X for which Z_α is simple.

In order to solve this problem under certain special assumptions we make the following observations. Let Y be a connected simple graph. It is clear from (6.10) that $(\partial Y)_*$ is a derivative with the property that for each $\varepsilon \in E((\partial Y)_*)$, E_ε has at most one non-regular vertex. Moreover, *if $(\partial Y)_*$ is regular,* (i.e., if every vertex of $(\partial Y)_*$ is regular) *then $(\partial Y)_* \approx \partial Y$.* (The converse of this is false.) Also from (6.11) it follows that *$(\partial Y)_*$ is regular if and only if* (i) *Y has no vertex of degree 1, and* (ii) *Y has no 3-circuit containing two vertices of degree 2.* We can now prove the following theorem.

(7.4) THEOREM. *Let X, X' be connected graphs such that* (i) *$(\partial X)_*$ is regular, and* (ii) *$\partial X \approx \partial X'$. Then $X \approx X'$.*

PROOF. Let Y, Y' be maximal simple subgraphs of X and X', respectively. (ii) implies $(\partial X)_* \approx (\partial X')_*$, hence by (7.2), $(\partial Y)_* \approx (\partial Y')_*$. By (i), $(\partial Y)_*$ is regular, hence $(\partial Y)_* \approx \partial Y$. Also $(\partial Y')_*$ must be regular, and therefore $(\partial Y')_* \approx \partial Y'$. Hence $\partial Y \approx \partial Y'$. Since ∂Y and $\partial Y'$ are regular, neither Y nor Y' is isomorphic to C_3. Hence by (5.2), $Y \approx Y'$. Let $\eta: Y \approx Y'$. Then by (6.8), $m_e = |f_X^{-1} f_Y e| = |f_{X'}^{-1} f_{Y'} \eta e| = m'_{\eta e}$ for each $e \in E(Y)$. Hence $X \approx X'$.

(7.5) COROLLARY. *Let X, X' be cyclically connected graphs such that* (i) *the maximal simple subgraphs of X and X' are not isomorphic to C_3, and* (ii) *$\partial X \approx \partial X'$. Then $X \approx X'$.*

(7.6) The other case which we shall consider is that of a simple connected graph X not isomorphic to C_3. We shall only sketch the result leaving the argument to the reader.

Let M be the set of all vertices of X which are adjacent to some vertex of degree 1. For $x \in M$ let W_x be any subset of $V(X; x)$ such that $d(X; y) = 1$ for each $y \in W_x$; for $x \notin M$ put $W_x = V(X; x)$. To each $y \in W_x$ assign a subset $E_{xy} \subset E(X; x)$ such that (i) $\cup \{E_{xy}: y \in W_x\} = \{[x, z] \in X: d(X; z) = 1\}$, and (ii) $E_{xy} \cap E_{xz} = \square$ if $y \neq z$, $y, z \in W_x$.

By $\{C_\alpha: \alpha \in A\}$ denote the set of all 3-circuits of X which contain two vertices of degree 2. Let $C_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$ and suppose that $d(X; x_\alpha) = d(X; y_\alpha) = 2$. Then z_α necessarily is a cut vertex of X. Note that it is possible that $z_\alpha = z_\beta$ for $\alpha \neq \beta$.

Let $B \subset A$ be given. Define Y by

$$V(Y) = \cup \{W_x: x \in X\},$$

$$E(Y) = E(X),$$

$$f_Y e = \begin{cases} e, & \text{if } e \notin \cup \{E_{xy}: y \in W_x,\ x \in X\} \cup \cup \{C_\alpha: \alpha \in B\} \\ [x, y], & \text{if } e \in E_{xy} \\ e, & \text{if } e = [x_\alpha, y_\alpha],\ \alpha \in B \\ [y_\alpha, z_\alpha], & \text{if } e = [x_\alpha, z_\alpha], \text{ or } e = [y_\alpha, z_\alpha],\ \alpha \in B. \end{cases}$$

Then $\partial Y \approx \partial X$. Conversely, any graph Y with $\partial Y \approx \partial X$ can be obtained by this construction (i.e., by a choice of sets W_x, E_{xy}, and B). Note, however, that the graphs arising from different choices of these sets are not necessarily non-isomorphic.

References

[1] Izbicki, H.: Über die explizite Automorphismengruppe von speziellen Graphen. J. reine angew. Math. **203**, 35–39 (1960).

[2] — Graphentransformationen. Mh. Math. Phys. **64**, 135–175 (1960).

[3] Sabidussi, G.: The composition of graphs. Duke Math. J. **26**, 693–696 (1959).

[4] Whitney, H.: Congruent graphs and the connectivity of graphs. Amer. J. Math. **54**, 150–168 (1932).

Tulane University and McMaster University, Hamilton, Ontario (Canada)

(Eingegangen am 23. November 1960)

Schmidt, H.
Math. Zeitschr. 76, 402/403 (1961)

Zur Charakterisierung der zyklischen Funktionen durch eine Funktionalgleichung

Von
Hermann Schmidt

Wie wir vor kurzem hervorgehoben haben[1]), genügt das Additionstheorem

$$f_\nu(x+y)=\sum_{j=1}^{n} f_j(x)\, f_{\nu-j+1}(y) \qquad (\nu=1,2,\ldots,n) \tag{1}$$

der sog. „zyklischen" Funktionen keineswegs zu deren Charakterisierung; vielmehr sind in der Lösung n Konstante willkürlich. Wohl aber genügt für $f_1(x)$ hierzu das Gegenstück zu der öfters und unter sehr allgemeinen Annahmen[2]) untersuchten Funktionalgleichung des Cosinus

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\,f(y).$$

Dies mag im folgenden kurz ausgeführt werden, wobei wir freilich wegen des unvermeidlichen Auftretens komplexer Argumente nicht ohne funktionentheoretische Voraussetzungen auskommen.

Für die zyklischen Funktionen folgt zunächst aus (1) und mit Rücksicht auf die Reihendarstellungen [die Potenzexponenten für $f_\nu(x)$ sind kongruent $\nu-1 \bmod n$]

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} f_\nu(x+\varepsilon^{\varkappa-1}y)=\sum_{\varkappa,j=1}^{n} f_j(x)\, f_{\nu-j+1}(\varepsilon^{\varkappa-1}y)=\sum_{\varkappa,j=1}^{n} f_j(x)\,\varepsilon^{(\nu-j)(\varkappa-1)}\, f_{\nu-j+1}(y)$$
$$=n\, f_\nu(x)\, f_1(y)$$

und für $\nu=1$ insbesondere

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} f_1(x+\varepsilon^{\varkappa-1}y)=n\, f_1(x)\, f_1(y).$$

Umgekehrt gilt nun der

Satz. *Es sei n eine natürliche Zahl $\geqq 3$, $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{n}}$ und $\mathfrak{S}$ das Sterngebiet $\{\varepsilon^\lambda x+\varepsilon^\mu y\}$, wo $0\leqq\lambda,\mu\leqq n-1$; $x, y\in \mathfrak{i}=\langle 0, r)$. Befriedigt dann die in $\mathfrak{S}$ reguläre Funktion $f(z)$ $(\not\equiv 0)$ für $x, y\in\mathfrak{i}$ die Funktionalgleichung*

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} f(x+\varepsilon^{\varkappa-1}y)=n\, f(x)\, f(y), \tag{2}$$

so ist $f(z)=f_1(\gamma z)$, wo γ eine Konstante bedeutet.

[1]) Herm. Schmidt (mit einem Zusatz von O. E. Gheorghiu), diese Z. **76**, 46–50 (1961), insbes. Satz 1.

[2]) Zuletzt von S. Kurepa [Canad. J. Math. **12**, 45–50 (1960)] für von einem reellen Parameter x abhängige stetige Abbildungen eines Hilbertschen Raumes in sich.

Beweis. Für $x=y=0$ ergibt sich $f(0)=f(0)^2$, also

(3) $\qquad f(0)=1,$ da bei $f(0)=0$ aus (2) für $y=0$ folgte $f(x)\equiv 0$.

Für $x=0$, $y\in\mathfrak{i}$ liefert jetzt (2) die (von selbst in $\mathfrak{S}$ gültige) Beziehung

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} f(\varepsilon^{\varkappa-1}y)=n\,f(y).$$

Ersetzt man y durch $\varepsilon y\,(\in\mathfrak{S})$, so folgt der Reihe nach $f(y)=f(\varepsilon y)=\cdots=f(\varepsilon^{n-1}y)$, woraus durch Differentiation

(4) $\qquad f^{(\lambda)}(y)=\varepsilon^{\nu\lambda}f^{(\lambda)}(\varepsilon^{\nu}y) \qquad (\nu=0,1,\ldots,n-1;\ \lambda=1,2,\ldots).$

Endlich ergibt λ-maliges Differenzieren von (2) nach x $(x,\,y\in\mathfrak{i})$

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} f^{(\lambda)}(x+\varepsilon^{\varkappa-1}y)=n\,f^{(\lambda)}(x)\,f(y),$$

woraus für $x=0$ vermöge (4)

$$n\,f^{(\lambda)}(0)\,f(y)=\sum_{\varkappa=1}^{n}\varepsilon^{-(\varkappa-1)\lambda}f^{(\lambda)}(y), \quad =0 \quad \text{für} \quad \lambda=1,2,\ldots,n-1,$$

somit

(5) $\qquad f^{(\lambda)}(0)=0 \quad (\lambda=1,2,\ldots,n-1).$

Dagegen kommt für $\lambda=n$

$$f^{(n)}(y)=f^{(n)}(0)\,f(y),$$

somit mit Rücksicht auf (3), (5) $f(y)=f_1(\gamma y)$ mit $\gamma^n=f^{(n)}(0)$, was dann identisch in $\mathfrak{S}$ gilt.

Bemerkung. Natürlich bleibt die Betrachtungsweise auch für $n=2,1$ anwendbar, wobei es genügt, für $f(x)$ zwei- bzw. einmalige Differenzierbarkeit in einem passenden reellen Intervall anzunehmen; doch hat man ja in diesen Fällen viel allgemeinere Ergebnisse.

Würzburg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 13. April 1961)

CARTWRIGHT, M. L., and E. F. COLLINGWOOD
Math. Zeitschr. 76, 404—410 (1961)

The radial limits of functions meromorphic in a circular disc

By
M. L. CARTWRIGHT and E. F. COLLINGWOOD

1. Let $w = f(z)$ be meromorphic in the unit disc $|z| < 1$, denoted by U, which it maps on the w-plane or, by stereographic projeciton, on the Riemann sphere S, and let $\varkappa$ denote the circumference $|z| = 1$. We denote by $D(f)$ the set of points $e^{i\vartheta} \in \varkappa$ at which the radial limit $\lim_{r\to 1} f(re^{i\vartheta}) = \Gamma_\varrho(f, e^{i\vartheta})$ exists and by $\Gamma_\varrho(f)$ the set $\bigcup_{e^{i\vartheta}\in\varkappa} \Gamma_\varrho(f, e^{i\vartheta})$ of all the radial limits of $f(z)$. For a set $A \subset \varkappa$ the set $\bigcup_{e^{i\vartheta}\in A} \Gamma_\varrho(f, e^{i\vartheta})$ is denoted by $\Gamma_\varrho(f, A)$.

It was proved by PRIVALOV[1]) that

If the set $D(f) \cap A$ is both of category II[2]) *and metrically dense*[3]) *on an arc $A \subset \varkappa$ then, either $\Gamma_\varrho(f)$ contains a closed set of positive capacity, or $f(z)$ is constant.*

This theorem may now be improved in two ways; the hypothesis may be weakened by dropping the metrical condition and the conclusion strengthened. As a special case of a more general theorem we shall prove

THEOREM 1. *If $f(z)$ is meromorphic in U and if $D(f) \cap A$ is of category* II *on an arc $A \subset \varkappa$ then, either $\Gamma_\varrho(f, A)$ is of positive linear measure, or $f(z)$ is constant.*

2. Our approach is that of the theory of cluster sets. In the usual notation[4]) $C(f, e^{i\vartheta})$ is the *complete cluster set* of $f(z)$ at $e^{i\vartheta}$ defined as follows: $\alpha \in C(f, e^{i\vartheta})$ if there is a sequence $\{z_n\} \subset U$ such that $\lim_{n\to\infty} z_n = e^{i\vartheta}$ and $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \alpha$. The set $C(f, e^{i\vartheta})$ is closed; and if its complement $\mathcal{C}C(f, e^{i\vartheta})$ is empty we say that $C(f, e^{i\vartheta})$ is *total*, otherwise it is *sub-total*. Similarly, the radial cluster set $C_\varrho(f, e^{i\vartheta})$ is defined by imposing the further condition $z_n = r_n e^{i\vartheta}$, where r_n is real and $0 < r_n < 1$.

A point $e^{i\vartheta} \in \varkappa$ such that $C(f, e^{i\vartheta})$ is total we call a *Weierstrass point* of $f(z)$ and denote the set of all such points on $\varkappa$ by $W(f)$ and the sub-set of them on $A \subset \varkappa$ by $W(f, A)$. A point $e^{i\vartheta} \in \varkappa$ such that $f(z)$ has a unique finite or infinite limit, denoted by $f(e^{i\vartheta})$, as $z \to e^{i\vartheta}$ in every Stolz angle $\Delta \subset U$ having $e^{i\vartheta}$ for its vertex is a *Fatou point* of $f(z)$. The set of all Fatou points of $f(z)$

[1]) PRIVALOV [8]. The proof is reproduced in [9] pp. 231—232. The numbers in square brackets refer to the list of references at the end.

[2]) We write category I and II for Baire's first and second category.

[3]) A set is metrically dense on an interval if the measure of its intersection with any sub-interval is positive.

[4]) The general reference for notation and definitions is to [5] and [1].

is denoted by $F(f)$ and the corresponding set $\bigcup_{e^{i\vartheta}\in F(f)} f(e^{i\vartheta})$ by $\Gamma_F(f)$. We write $F(f, A)$ for $F(f)\cap A$ and $\Gamma_F(f, A)$ for the corresponding set of angular limits on A.

An arc of $\varkappa$ in some neighbourhood of which either $f(z)$ or, for some $a\neq\infty$, $1/|f(z)-a|$ is uniformly bounded is called a *Fatou arc* for $f(z)$. It follows from the well-known theorem of Fatou that *almost all points of a Fatou arc are Fatou points of* $f(z)$.

A *pointwise asymptotic value of* $f(z)$ is a value α such that, for some $e^{i\vartheta}\in\varkappa$ and some Jordan arc $\gamma\subset U$ terminating at $e^{i\vartheta}$, $f(z)\to\alpha$ as $z\to e^{i\vartheta}$ along γ. The set of all such values is denoted by $\Gamma_P(f)$ and the subset of them associated with points $e^{i\vartheta}\in A\subset\varkappa$ by $\Gamma_P(f, A)$.

We note that if A, which may be the whole of $\varkappa$, is a Fatou arc, then, by Lindelöf's theorem on asymptotic values,

$$\Gamma_F(f, A)=\Gamma_Q(f, A)=\Gamma_P(f, A), \tag{1}$$

while for any set $A\subset\varkappa$,

$$\Gamma_F(f, A)\subset\Gamma_Q(f, A)\subset\Gamma_P(f, A). \tag{2}$$

3. Suppose now that $e^{i\vartheta}\in\mathscr{C}W(f)=\varkappa-W(f)$. Then $\mathscr{C}C(f, e^{i\vartheta})$ is not empty and is thus open and contains a circular disc of centre a, say, and radius $\varepsilon>0$. There is therefore a circular disc d of centre $e^{i\vartheta}$ and radius $\delta>0$ such that, in $d\cap U$, $f(z)$ does not meet the disc of centre a and radius $\varepsilon/2$. The arc $\varkappa\cap d$ is therefore an open Fatou arc of $f(z)$. We have thus proved

LEMMA 1. *If an arc A of $\varkappa$ contains no Fatou arc of $f(z)$, then $A\subset W(f)$.*

We also require the following lemma which we proved in a previous paper[5]).

LEMMA 2. *If B is a Fatou arc of $f(z)\neq$ constant, then for any pair ϑ_1, ϑ_2 such that $e^{i\vartheta_1}\subset B\cap F(f)$, $e^{i\vartheta_2}\subset B\cap F(f)$ and $f(e^{i\vartheta_1})\neq f(e^{i\vartheta_2})$, the projection on the straight line L joining $f(e^{i\vartheta_1})$ and $f(e^{i\vartheta_2})$ of the set $\Gamma_F(f, B)$ contains L; and hence $\Gamma_F(f, B)$ is of positive linear measure.*

By the theorem of F. and M. Riesz $e^{i\vartheta_1}$ and $e^{i\vartheta_2}$ can always be found satisfying the conditions of the lemma and arbitrarily near to any given pair of points of B.

4. We shall now prove our main theorem from which Theorem 1 follows.

We denote by $E(f)$ the set of points $e^{i\vartheta}\in\varkappa$ such that $C_Q(f, e^{i\vartheta})$ is sub-total. By a theorem of COLLINGWOOD[6]), valid for continuous functions,

$$C_Q(f, e^{i\vartheta})=C(f, e^{i\vartheta}) \tag{3}$$

except perhaps in a set of points $e^{i\vartheta}$ of category I *on* $\varkappa$. Hence, if on an arc $A\subset\varkappa$ the set $E(f)\cap A$ is of category II the set $\mathscr{C}W(f)\cap A$ is also of category II and therefore not empty. By Lemma 1. A therefore contains a Fatou arc B

[5]) [5], Lemma 4. This is proved for a mapping on the plane but the conclusion on $\Gamma_F(f, B)$ is plainly valid also for a mapping on S.

[6]) [3], Theorem 1. See also [2].

and it follows from Lemma 2. that, if $f(z)$ is not constant, $\Gamma_\varrho(f, A) > \Gamma_\varrho(f, B) = \Gamma_F(f, B)$ is of positive linear measure. We have thus proved

THEOREM 2. *If $f(z)$ is meromorphic in U and $E(f)$ is of category* II *on some arc $A < \varkappa$, then either $\Gamma_\varrho(f, A)$ is of positive linear measure or $f(z)$ is constant.*

This theorem contains Theorem 1 since $D(f) < E(f)$.

5. We write $\mathrm{m}\Gamma$ for the linear measure of the set Γ and $\operatorname{cap}\Gamma$ for its logarithmic capacity.

In the usual notation $R(f, e^{i\vartheta})$ is the set of values α such that $f(z_n) = \alpha$ for all z_n belonging to a sequence $\{z_n\} < U$, $\lim_{n\to\infty} z_n = e^{i\vartheta}$. The complement $S - R(f, e^{i\vartheta})$ is denoted by $\mathscr{C}R(f, e^{i\vartheta})$. A point $e^{i\vartheta}$ for which $\operatorname{cap}\mathscr{C}R(f, e^{i\vartheta}) = 0$ is termed a *Frostman point* and the set of such points of $\varkappa$ is denoted by $H(f)$[7]. A point for which $\mathscr{C}R(f, e^{i\vartheta})$ contains at most two points is a *Picard point* and the set of Picard points is denoted by $P(f)$. The notion of a Picard point may be generalised in the following way. Denote by $P_n(f)$, $0 \leqq n < \infty$, the set of points $e^{i\vartheta} \in \varkappa$ such that $\mathscr{C}R(f, e^{i\vartheta})$ contains at most n values, and by $P_{\aleph_0}(f)$ the set for which $\mathscr{C}R(f, e^{i\vartheta})$ is at most enumerable. Then, plainly, for any finite $n \geqq 0$ we have $P_n(f) < P_{n+1}(f) < P_{\aleph_0}(f)$ and, in particular,

$$P(f) = P_2(f) > P_0(f) \cup P_1(f).$$

We shall now prove

THEOREM 3. *If $f(z)$ is meromorphic in U and if*

(i) *for some finite $n \geqq 0$ the set $\Gamma_F(f)$ contains at most n values, then*

$$\varkappa < P(f) \cup P_n(f);$$

while if

(ii) *$\Gamma_F(f)$ is at most enumerable, then*

$$\varkappa < P_{\aleph_0}(f).$$

To prove this we rely on theorems proved in our previous paper [5]. The following definitions and notation are required. By $\Gamma_P(f, |\vartheta' - \vartheta| < \eta)$ and $\Gamma_F(f, |\vartheta' - \vartheta| < \eta)$ we denote the sub-sets of $\Gamma_P(f)$ and $\Gamma_F(f)$ associated with points of the arc $(e^{i(\vartheta-\eta)}, e^{i(\vartheta+\eta)})$ of $\varkappa$ which contains the point $e^{i\vartheta}$. For the intersections of these sets for indefinitely decreasing η we write

$$\chi_P(f, e^{i\vartheta}) = \bigcap_\eta \Gamma_P(f, |\vartheta' - \vartheta| < \eta)$$

and

$$\chi_F(f, e^{i\vartheta}) = \bigcap_\eta \Gamma_F(f, |\vartheta' - \vartheta| < \eta).$$

The set $\Gamma_P(f)$ is a subset of $\Gamma(f)$, the set of all the asymptotic values of $f(z)$, which may contain values which are not pointwise, i.e. limits of $f(z)$ on paths in U converging not to end-points on $\varkappa$ but to arcs of $\varkappa$ or to the whole of $\varkappa$. We denote by $\Gamma(f, |\vartheta' - \vartheta| < \eta)$ the sub-set of $\Gamma(f)$ associated with asymptotic paths which converge to arcs or end-points contained in the

[7] [5], p. 138.

arc $(e^{i(\vartheta-\eta)}, e^{i(\vartheta+\eta)})$ of $\varkappa$, and we write

$$\chi(f, e^{i\vartheta}) = \bigcap_{\eta} \Gamma(f, |\vartheta' - \vartheta| < \eta).$$

To prove the theorem suppose that $e^{i\vartheta}$ is not a point of $P(f)$. We can therefore find $\eta > 0$ such that in the sub-domain $V(\vartheta)$ of U bounded by the arc $(e^{i(\vartheta-\eta)}, e^{i(\vartheta+\eta)})$ containing $e^{i\vartheta}$ and the circular arc of centre $e^{i\vartheta}$ passing through the points $e^{i(\vartheta-\eta)}$ and $e^{i(\vartheta+\eta)}$ the function $f(z)$ omits at least three values. Under a conformal mapping of $V(\vartheta)$ onto a circular disc the sets $\Gamma(f, |\vartheta' - \vartheta| < \eta)$ and $\Gamma_P(f, |\vartheta' - \vartheta| < \eta)$ are invariant and it follows ([5], Theorem 6) that

$$\Gamma(f, |\vartheta' - \vartheta| < \eta) = \Gamma_P(f, |\vartheta' - \vartheta| < \eta) = \Gamma_F(f, |\vartheta' - \vartheta| < \eta)$$

and hence that

$$\chi(f, e^{i\vartheta}) = \chi_F(f, e^{i\vartheta}). \tag{4}$$

Now, by hypothesis, $\Gamma_F(f, |\vartheta' - \vartheta| < \eta) < \Gamma_F(f)$ is either finite or at most enumerable and thus of linear measure zero. Therefore ([5], Theorem 16 (ii), (19.3))

$$\mathscr{C}R(f, e^{i\vartheta}) < \chi(f, e^{i\vartheta})$$

and so, in virtue of (4),

$$\mathscr{C}R(f, e^{i\vartheta}) < \chi_F(f, e^{i\vartheta}).$$

But $\chi_F(f, e^{i\vartheta}) < \Gamma_F(f)$ and, since $e^{i\vartheta} \in \varkappa - P(f)$, both parts of the theorem follow.

A counter-example shows that Theorem 3 is best possible in the sense that the set $P(f)$ cannot be eliminated in (i) even if $n = 0$. We recall ([5], p. 94) the definition of the set $\Gamma_S(f)$ of *spirally asymptotic values* of $f(z)$. $\alpha \in \Gamma_S(f)$ if there is a continuous path $z = z(t)$, $0 < t < 1$, such that $\lim_{t\to 1} |z(t)| = 1$, $|\arg z(t)|$ is unbounded and $\lim_{t\to 1} f(z(t)) = \alpha$. The true spirals for which $\lim_{t\to 1} \arg z(t) = \pm\infty$ give a subset of $\Gamma_S(f)$. We can construct a function $f(z)$ regular and $\neq 0$ in U such that $(0) \cup (\infty) < \overline{\Gamma}_S(f)$, so that $\Gamma_F(f)$ must be empty while $\mathscr{C}R(f, e^{i\vartheta})$ contains both 0 and ∞ for every $e^{i\vartheta} \in \varkappa$. For the construction we refer to [4a], §2. The modular function $\mu(z)$, for which $0, 1, \infty$ are the sole values belonging to $\mathscr{C}R(\mu)$ and to $\Gamma_F(\mu)$,and the function $\log \mu(z) = Q(z)$, for which $\mathscr{C}R(Q)$ and $\Gamma_F(Q)$ both consist of the values $\infty, \pm 2n\pi i$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, are familiar examples which show that the theorem is also best possible when $\Gamma_F(f)$ contains more than two values.

6. The results now available, brought together, lead to a simple scheme of relations between the metrical or arithmetical properties of $\Gamma_F(f)$ and the nature of $\varkappa$ as a singular boundary. We set this out as

THEOREM 4. *Let $f(z)$ be meromorphic in U. Then*

(i) $\mathrm{m}\,\Gamma_F(f) = 0 \Rightarrow \varkappa < W(f)$;

(ii) $\mathrm{cap}\,\Gamma_F(f) = 0 \Rightarrow \varkappa < H(f)$;

(iii) $\Gamma_F(f)$ *enumerable* $\Rightarrow \varkappa < P_{\aleph_0}(f)$;

(iv) $I_F(f)$ *contains at most* n *values*

$$\Rightarrow \begin{cases} \varkappa < P_n(f) & \text{if} \quad 2 < n < \infty \\ \varkappa < P(f) & \text{if} \quad 0 \leqq n \leqq 2. \end{cases}$$

The implication (i) is an immediate consequence of Lemmas 1 and 2. (ii) is a known result[8]), but we give an alternative proof based on another theorem of PRIVALOV[9]), namely the implication

(v) $\operatorname{cap} I_F(f) = 0 \Rightarrow \mathrm{m}\, F(f) = 0$.

Now $\mathrm{m}F(f) = 0$ implies that the set $F_1(f)$ of points $e^{i\vartheta} \in \varkappa$ at which the set $F(f)$ is of density 1 is empty. By a theorem of LITTLEWOOD[10]) every point of $\varkappa$ belongs either to $H(f)$ or to $F_1(f)$ so that (ii) follows from (v). In (iii) and (iv) we have re-stated Theorem 3.

COROLLARY 1. *If* $f(z)$ *is meromorphic in* U *and possesses at least one spirally asymptotic value, then* $\varkappa < P(f)$.

For, if $I_S(f)$ contains one value only, then $I_F(f)$ is either empty or contains this same value and no other; or, if $I_S(f)$ contains more than one value $I_F(f)$ is empty.

This corollary supplements some recent theorems of SEIDEL on functions having spirally asymptotic values[11]).

To prove our next corollary we require

LEMMA 3. *If* $f(z)$ *is meromorphic in* U, *then*

$$F(f') < F(f),$$

where $f'(z)$ *is the derivative of* $f(z)$.

Let $e^{i\vartheta} \in F(f')$ and $\Delta(\vartheta)$ be any Stolz angle in U having $e^{i\vartheta}$ as its vertex. Denote by $\delta(\varrho, \vartheta)$ the disc $|z - e^{i\vartheta}| < \varrho$ and by $\Delta(\varrho, \vartheta)$ the intersection $\Delta(\vartheta) \cap \delta(\varrho, \vartheta)$. Now let $\alpha = f'(e^{i\vartheta}) = \lim_{r \to 1} f'(r e^{i\vartheta})$. Then, given $\varepsilon_n > 0$ we can find ϱ_n such that $|f'(z) - \alpha| < \varepsilon_n$ in $\Delta(\varrho_n, \vartheta)$. Let z, z_0 be two points in $\Delta(\varrho_n, \vartheta)$. Then

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + \int_{z_0}^{z} f'(z)\, dz \\ &= f(z_0) + \alpha \int_{z_0}^{z} dz + \int_{z_0}^{z} (f'(z) - \alpha)\, dz \\ &= f(z_0) + \alpha(z - z_0) + \varphi(z, z_0), \end{aligned}$$

where $|\varphi(z, z_0)| < \varepsilon_n |z - z_0| < 2\varepsilon_n \varrho_n$, and so

$$|f(z) - f(z_0)| < 2\varepsilon_n (\alpha + \varrho_n).$$

---

[8]) [6], p. 100.

[9]) [8], The proof is reproduced in [9] pp. 210–212. The theorem, which generalises a previous theorem of FROSTMAN and R. NEVANLINNA [7], p. 209, was re-discovered by TSUJI [10], who gave a different proof.

[10]) [5], Theorem 21 (p. 138).

[11]) [13].

Denote the cluster set of $f(z)$ in the Stolz angle $\Delta(\vartheta)$ in the usual way by $C_{\Delta(\vartheta)}(f, e^{i\vartheta})$ and let $\beta \in C_{\Delta(\vartheta)}(f, e^{i\vartheta})$. Then, given $\eta > 0$, we can find a sequence $\{z_n\} < \Delta(\vartheta)$, $|z_n| < |z_{n+1}|$, $\lim_{n\to\infty} z_n = e^{i\vartheta}$, such that $|f(z_n) - \beta| < \eta$. Suppose, as we may, that $|e^{i\vartheta} - z_n| < \varrho_n$ so that for $z \in \Delta(\varrho_n, \vartheta)$ we have

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_n) + \alpha(z - z_n) + \varphi(z, z_n) \\ &= \beta + (f(z_n) - \beta) + \alpha(z - z_n) + \varphi(z, z_n) \end{aligned}$$

and hence

$$|f(z) - \beta| < |f(z_n) - \beta| + 2\varepsilon_n(\alpha + \varrho_n) < 2\eta$$

by choice of n. But η is arbitrary and it follows that $C_{\Delta(\vartheta)}(f, e^{i\vartheta})$ is of zero diameter and therefore consists only of the value β. The convergence of $f(z)$ to β is uniform in $\Delta(\vartheta)$ so that $e^{i\vartheta} \in F(f)$ and the lemma is proved.

Lemma 3 at once gives

COROLLARY 2. *Let $f(z)$ be meromorphic in U and $f^{(\nu)}(z)$ its ν'th derivative. Then, for any ν,*

(i) $\mathrm{m}\, \Gamma_F(f) = 0 \Rightarrow \varkappa < W(f^{(\nu)})$;

(ii) $\mathrm{cap}\, \Gamma_F(f) = 0 \Rightarrow \varkappa < H(f^{(\nu)})$;

(iii) $\Gamma_F(f)$ *enumerable* $\Rightarrow \varkappa < P_{\aleph_0}(f^{(\nu)})$;

(iv) $\Gamma_F(f)$ *contains at most n values*

$$\Rightarrow \begin{cases} P_n(f^{(\nu)}) & \text{if} \quad 2 < n < \infty \\ P(f^{(\nu)}) & \text{if} \quad 0 \leqq n \leqq 2. \end{cases}$$

For $\Gamma_F(f^{(\nu)}) < \Gamma_F(f)$.

6. We conclude with an observation on the content of Lemma 2 and Theorem 1. As regards Lemma 2, the question may be asked whether $\Gamma_F(f, B)$ necessarily contains a continuum? The answer is in the negative even in the case where every point of the Fatou arc B belongs to $F(f)$. As counter example we cite a schlicht function $f(z)$ which maps U onto a bounded domain D, constructed by CARATHÉODORY[12]), whose prime ends are all of the first or second kinds (each thus having an accessible point, so that $\varkappa < F(f)$) and such that the accessible points of the boundary form a set which is rendered totally disconnected by the removal of a single (dispersion) point, p say. Such a set contains no continuum. For, any continuum contained in the set must contain p; and, by a well-known theorem[13]), any such continuum contains a sub-continuum which does not contain p. We do not repeat the construction of this domain D since it is given in detail by CARATHÉODORY in sections 49 and 51 of his paper. It is enough to say that in that construction the origin O is the impression of all the prime ends of D of the first kind and is not the accessible point of any of the non-enumerable set of prime

[12]) [*11*], paragraphs 49 and 51. Examples of sets which are everywhere discontinuous and yet whose projections on a particular line fill a segment are well-known. See Encyclopädie Math., II 2, p. 933.

[13]) [*12*], Theorem IX″ (p. 213).

ends of the second kind every pair of which is separated by a circle through O which meets the frontier of D in no other point. Removal of O thus renders the remainder of the set $\Gamma_F(f)$ of accessible points totally disconnected.

This example, for which $D(f)=\varkappa$, also illustrates the extremal case of Theorem 1. For, by a theorem of COLLINGWOOD[14]), the set $D_1(f)$ of points of $\varkappa$ corresponding to prime ends of the first kind is residual, i.e. the complement $\mathcal{C}D_1=\varkappa-D_1=D-D_1$ is of category I. But in our example $\Gamma_F(f, D_1)$ consists of the single point O so that it is of zero measure, while $\Gamma_F(f, D-D_1)$ is an infinite set whose projection fills the diameter of a circle through O and is thus of positive measure. Further, by the theorem of F. and M. RIESZ, $D_1(f)$ is of measure zero.

References

[1] COLLINGWOOD, E. F.: On the linear and angular clusters sets of functions meromorphic in the unit circle. Acta math. **91**, 165—185 (1954).

[2] — On sets of maximum indetermination of analytic functions. Math. Z. **67**, 377—396 (1957).

[3] — Cluster sets and prime ends. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1 250—256 (1958).

[4] — A theorem on prime ends. J. London Math. Soc. **31**, 344—349 (1956).

[4a] — On functions meromorphic in the unit disc and restricted on a spiral converging to the boundary. J. Indian Math. Soc. **24**, 223—229 (1961).

[5] —, and M. L. CARTWRIGHT: Boundary theorems for a function meromorphic in the unit circle. Acta math. **87**, 83—146 (1952).

[6] —, and A. J. LOHWATER: Applications of the theory of cluster sets to a class of meromorphic functions. Proc. Cambridge Phil. Soc. **53**, 93—105 (1957).

[7] NEVANLINNA, R.: Eindeutige analytische Funktionen, 2nd. edit. Berlin 1953.

[8] PRIVALOV, I. I.: Sur quelques applications de la mesure harmonique des ensembles de points à certains problèmes de la théorie des fonctions. Rec. Math. Moscou, N.s. **3**, 527—532 (Russian; French summary 533) (1938).

[9] — Randeigenschaften analytischer Funktionen. Berlin 1956.

[10] TSUJI, M.: Theory of meromorphic functions in a neighbourhood of a closed set of capacity zero. Jap. J. Math. **19**, 93—105 (1944—1948).

[11] CARATHÉODORY, C.: Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete. Math. Ann. **73**, 323—370 (1913).

[12] KNASTER, B., and C. KURATOWSKI: Sur les ensembles connexes. Fund. Math. **2**, 206—255 (1921).

[13] SEIDEL, W.: Holomorphic functions with spiral asymptotic paths. Nagoya Math. J. **14**, 159—171 (1959).

[14]) [4], Theorem 4 (p. 349).

Girton College, Cambridge.
Lilburn Tower, Alnwick, Northumberland

(Eingegangen am 7. Dezember 1960)

Wagner, A.
Math. Zeitschr. 76, 411—426 (1961)

On collineation groups of projective spaces. I

By
A. Wagner

§ 1. Introduction

In this paper we shall deal mainly with the following question: what are the collineation groups of a finite projective space doubly transitive on the points of the space?

Our main results are: Theorem 2, that all such groups contain doubly transitive simple subgroups, and Theorem 4, that if the dimension of the space is less than 5, then, except for the 15-point space (*i.e.* the three-dimensional space with three points on every line), all doubly transitive groups contain the little projective group of the space (*i.e.* the unimodular projective group).

A collineation group containing the little projective group is always doubly transitive on the space. That the converse is not always true is shown by the case of the 15-point space. Whether this is the only exception remains an open question. However, it seems very likely that this is not the only exception and that other examples will occur already in spaces of dimension 5.

We may remark in passing that for the case of finite projective spaces with 3 points on every line, our question is equivalent to the question of classifying all triply transitive permutation groups with normal subgroups not more than singly transitive.

In § 2 we discuss the basic concepts involved. In § 3 we list results which will be needed later. Some of these are straightforward generalisations of known results for finite projective planes, and only brief indications are given of the proof. In § 4 we obtain some useful preliminary results concerning collineation groups containing perspectivities. In § 5 we prove our main results on doubly transitive collineation groups. The exceptional case of the 15-point space is discussed in Appendix I and is used in Appendices II and III as a source for counter-examples.

The author wishes to express his indebtedness to Professor Marshall Hall for drawing his attention to the question with which this paper mainly deals.

§ 2. Definitions and basic concepts

The terms *projective space* and *linear subspace, subspace* for short, will be used in the usual sense and for our purpose may most conveniently be thought of as being defined synthetically, see for example Veblen and Young [*10*]. *Points* are subspaces of dimension 0, *lines* subspaces of dimension 1, *planes* subspaces of dimension 2, and, if the space has dimension k,

hyperplanes are subspaces of dimension $k-1$. Normally a projective space will be understood to have dimension at least 2. We shall denote a projective space of dimension k by S_k. If $k \geqq 3$ or the space is a desarguesian plane, then S_k may be co-ordinatized by a skew field. If the space is pappian, then S_k may be co-ordinatized by a field.

A *collineation* of S_k is a permutation of the subspaces preserving their dimension and incidence. If S_k may be co-ordinatized by a field $\mathfrak{F}$, then the group of all collineations of S_k is isomorphic to the quotient group of the group of non-singular semi-linear transformations of a $k+1$ dimensional vector space over $\mathfrak{F}$ by its centre.

A collineation σ of S_k fixing all points of a hyperplane H_{k-1} is called a *perspectivity*. σ will also fix all hyperplanes through some point P_0. P_0 and H_{k-1} will be called the *centre* and *axis* of σ respectively. We shall also say that σ is a (P_0, H_{k-1})-perspectivity. If $P_0 \in H_{k-1}$, σ will be called an *elation*, and if $P_0 \notin H_{k-1}$, σ will be called a *homology*.

The group of collineations generated by all perspectivites of S_k will be called the *full projective group*. If S_k may be co-ordinatized by a field $\mathfrak{F}$, then the full projective group of S_k is isomorphic to the quotient group of the group of non-singular linear transformations of a $k+1$ dimensional vector space over $\mathfrak{F}$ by its centre. This group is also called the *projective linear group*.

The group of collineations generated by all elations of S_k will be called the *little projective group*. If S_k is co-ordinatized by a field $\mathfrak{F}$, then this group is isomorphic to the quotient group of the group of unimodular linear transformations of a vector space of dimension $k+1$ over $\mathfrak{F}$ by its centre. This group is also called the *unimodular projective group*. It is also isomorphic to the subgroup of the projective linear groups consisting of those elements with determinant a $(k+1)$-th power in $\mathfrak{F}$.

For a treatment of the above topics, see for example ARTIN [2].

As is usual, subspaces of S_k of dimension s and $k-s-1$ will be considered *dual*. A one-to-one mapping of the linear subspaces of S_k onto their duals and preserving incidence will be called a *correlation*. A correlation of order 2 will be called a *polarity*. If ϑ is a polarity and P_0 a point of S_k such that $P_0 \in P_0\vartheta$, then P_0 will be called an *absolute point* of ϑ.

In this paper we shall consider only *finite projective spaces, i.e.* spaces with a finite number of points. If a line contains $n+1$ points, so do all lines, and n will be called the *order* of the space. If the space may be co-ordinatized by a skew field $\mathfrak{F}$, then $\mathfrak{F}$ contains n elements. Since $\mathfrak{F}$ is finite it will be a field. Hence in this case n is a power of a prime. If S_k has order n, then S_k contains $(n^{k+1}-1)/(n-1)$ points. This number we shall often denote by n_k.

A k-fold transitive permutation group will be said to be *sharply* k-fold transitive if only the identity fixes k symbols.

With the hope of facilitating a reading of this paper, we shall now make some more informal comments.

For the case of finite projective planes, the results of this paper are contained in results by OSTROM and WAGNER [8], [9]. However, for the sake of completeness, the results here are stated to include the case of planes. Since we are thus dealing essentially with spaces of dimension greater than 2, all spaces may be thought of as being co-ordinatized by a field.

The arguments of Theorems 3 and 4 are made more complicated by the need to distinguish between the full and the little projective groups. For this purpose, appeal is made to determinants in Lemma 4. Otherwise the argument makes no overt use of a co-ordinatizing field and is based only on geometrical and permutation group theoretical concepts. It is for this reason that we have used the geometrical names full and little projective group in preference to their better known algebraic equivalents.

If P_0 is any point and H_{k-1} any hyperplane of S_k and L_1 any line through P_0, then the group of all (P_0, H_{k-1})-perspectivities is transitive on the points of L_1 with P_0 and $H_{k-1} \cap L_1$ omitted. Thus S_k contains "all possible" perspectivities. The order of the full projective group may be readily computed and is

$$n_k \cdot n \cdot n_{k-1} \cdot n^2 \cdot n_{k-2} \cdot \cdots \cdot n^k \cdot (n-1)^k,$$

where n is the order of S_k. The order of the little projective group is the order of the full projective group divided by d, where $d=(k+1, n-1)$ — see Lemma 4. (See DICKSON [5], pp. 77 and 87.) When $n=2$, the collineation group, the full and little projective groups all coincide. Also there are no homologies.

The little projective group cannot be defined geometrically for a projective line. To avoid re-phrasing, we shall use the geometric name for the corresponding projective unimodular group.

To avoid tedious repetition in the proofs, all perspectivities will normally be understood to differ from the identity. Also all collineations appearing in the proofs will be understood to belong to the group stated in the enunciation of the result.

If Π is any permutation group, then $\Pi(S, T, \ldots)$ will denote the subgroup of Π consisting of those elements of Π fixing the symbols $S, T, \ldots$.

Finally, there are two simple results which are used repeatedly in the proofs.

(i) If σ is a (P_0, H_{k-1})-perspectivity and α is any collineation, then $\alpha^{-1}\sigma\alpha$ is a $(P_0\alpha, H_{k-1}\alpha)$-perspectivity.

(ii) If Π is a permutation group and $\mathfrak{S}$ a transitive class of s symbols under Π, then the order of $\Pi = s \cdot$ order of $\Pi(S)$, where S is any symbol of $\mathfrak{S}$.

§ 3. Results required later

I. Let Π be a permutation group and $\mathfrak{S}$ and $\mathfrak{T}$ two transitive classes under Π If the number of elements in $\mathfrak{S}$ is prime to the number of elements in $\mathfrak{T}$ and S is any element of $\mathfrak{S}$, then $\Pi(S)$ is transitive on $\mathfrak{T}$.

II. Let Π be a permutation group on a set $\mathfrak{S}$ and let Σ be a normal subgroup of Π with $\Sigma \neq 1$.

(a) If Π is transitive on $\mathfrak{S}$, then Σ splits $\mathfrak{S}$ into transitive classes each containing the same number of elements.

(b) If Π is doubly transitive on $\mathfrak{S}$, then Σ is transitive on $\mathfrak{S}$.

(c) If Π is triply transitive on $\mathfrak{S}$, and Σ is not sharply transitive on $\mathfrak{S}$, then Σ is doubly transitive on $\mathfrak{S}$.

The next three results are true for all finite λ-spaces, hence finite projective spaces. Proofs of these results are given in DEMBOWSKI [4].

III. Let γ be a collineation of a finite projective space. Then the number of points left fixed by γ is equal to the number of hyperplanes left fixed by γ.

IV. Let Γ be a collineation group of a finite projective space. Then the number of transitive classes of points under Γ is equal to the number of transitive classes of hyperplanes under Γ.

V. If Γ is a collineation group of a finite projective space S_k doubly transitive on the points of S_k, then Γ is also doubly transitive on the hyperplanes of S_k.

In view of Results IV and V, we shall refer to collineation groups which are transitive (doubly transitive) on the points of a space simply as *transitive (doubly transitive)* collineation groups.

VI. Let Γ be a collineation group of a finite projective space S_k. Further, for every point P_0 lying on a given hyperplane H_{k-1}, the group of all (P_0, H_{k-1})-elations contained in Γ has the same order greater than 1. Then the group of all elations with axis H_{k-1} contained in Γ is transitive on the points of S_k not lying on H_{k-1} (*i.e.* Γ contains all elations with axis H_{k-1}).

For $k=2$, *i.e.* finite projective planes not necessarily desarguesian, this result was proved by GLEASON [6]. Gleason's proof may readily be extended to higher dimensional spaces, see WAGNER [12]. Also the analogous result for λ-spaces has been proved by LÜNEBURG [7], and this contains the above as a special case.

VII. Let S_k be a finite projective space and let α and β be two homologies with centres A_0 and B_0 respectively and common axis H_{k-1}. Then the group generated by α and β contains an elation with axis H_{k-1} mapping A_0 onto B_0.

For $k=2$, again without assuming that the plane is desarguesian, this result was proved by ANDRÉ [1]. His proof may be extended to higher dimensions. The result may also be deduced immediately from the theory of Frobenius permutation groups, see WAGNER [12].

VIII. If ϑ is a polarity of a finite projective space S_k, then ϑ possesses absolute points.

For $k=2$, this result was proved by BAER [3]. For higher dimensions this result may either be proved algebraically or deduced from BAER's result by induction. We outline the latter proof.

We assume the result true for dimension $k-1$ but false for S_k. Let H_{k-1} be a hyperplane of S_k. If P_0 is any point on H_{k-1}, let $P_{k\ 1}=P_0\vartheta$. In view of our assumption, $P_{k-1}\neq H_{k\ 1}$. Now let $P_{k-2}=H_{k\ 1}\cap P_{k-1}$. Also, by our assumption, $P_0\notin P_{k-2}$. Further, if Q_0 is any other point of H_{k-1} distinct from P_0, $Q_{k\ 2}\neq P_{k-2}$ since otherwise $H_{k-1}\vartheta\in P_{k-2}$. Consequently the mapping $P_0\to P_{k-2}$ is a one-to-one mapping of the points of H_{k-1} onto the hyperplanes of H_{k-1}. It is easily seen that this is a polarity which by our assumption has no absolute points. This contradiction establishes the result.

IX. Let Π be a collineation group of a finite projective plane and let Π be transitive on non-incident point-line pairs. Then the plane is desarguesian and Π contains the little projective group of the plane.

It was shown by Ostrom [8] that Π is doubly transitive on the plane, and for Π doubly transitive the above result was proved by Ostrom and Wagner [9].

X. If Π is a collineation group of a projective space S_k and the normaliser of Π contains the little projective group of S_k, then Π contains the little projective group of S_k.

This result is proved in Artin [2], p. 165, with the assumption that Π is contained in the full projective group. This assumption, however, is not necessary to the proof.

§ 4. Collineation groups containing perspectivities

Lemma 1. *Let Π be a collineation group of S_k with the properties:*

(i) *Π is transitive on S_k.*

(ii) *Π contains a non-trivial homology.*

Then Π contains an elation.

It will be convenient to call a hyperplane P_{k-1} *an axis of the point* P_0 if there exists a (P_0, P_{k-1})-homology. Also we shall call P_0 a *centre of the hyperplane* P_{k-1}.

Since Π is transitive on S_k, every point of S_k is the centre of a homology and every hyperplane of S_k is the axis of a homology. If a hyperplane has more than one centre, the lemma follows from Result VII. Similarly, if a point has more than one axis, the lemma follows from the dual of Result VII. Thus we need only consider the case where there is a one-to-one correspondence of points and hyperplanes determined by the relationship "axis" and "centre". It is easily seen that this correspondence is a polarity with no absolute points. A proof of this assertion is given for the case of planes in Wagner [11] (Statement I of Theorem 2), and is directly applicable to higher dimensions. In view of Result IV, such a polarity is impossible, and the contradiction establishes the lemma.

Lemma 2. *Let Π be a doubly transitive collineation group of a finite projective space S_k. Then if H_{k-1} and K_{k-1} are any two hyperplanes of S_k and P_0 is any point of S_k, with $P_0\in K_{k-1}$ and $P_0\notin H_{k-1}$, and if H'_{k-1}, K'_{k-1}, P'_0*

are defined similarly, there exists a collineation $\pi \in \Pi$ *such that* $H_{k-1}\pi = H'_{k-1}$, $K_{k-1}\pi = K'_{k-1}$ *and* $P_0\pi = P'_0$.

Let L_{k-1} be any hyperplane of S_k. Then $\Pi(L_{k-1})$ splits the hyperplanes of S_k into two transitive classes, namely L_{k-1} and all the other hyperplanes. Hence by Result IV $\Pi(L_{k-1})$ splits the points of S_k into two transitive classes, namely the points of L_{k-1} and the points of S_k not on L_{k-1}. Now since $\Pi(L_{k-1})$ is transitive on the points of L_{k-1}, it is transitive on the hyperplanes of L_{k-1}. The number of hyperplanes of L_{k-1} is n_{k-1} and the number of points of S_k not on L_{k-1} is n^k. Since $(n^k, n_{k-1}) = 1$, it follows from Result I that the subgroup of $\Pi(L_{k-1})$ fixing a given hyperplane of L_{k-1} is still transitive on the points of S_k not on L_{k-1}.

To complete the proof of the lemma, we first observe that there exists an element $\alpha \in \Pi$ with $H_{k-1}\alpha = H'_{k-1}$. Clearly $P_0\alpha \notin H'_{k-1}$. Also let $K_{k-1}\alpha \cap H'_{k-1} = K_{k-2}$ and $K'_{k-1}\alpha \cap H'_{k-1} = K'_{k-2}$. Then from the above it follows that there exists an element $\beta \in \Pi(H'_{k-1})$ which maps K_{k-2} onto K'_{k-2} and $P_0\alpha$ onto P'_0. Then $\pi = \alpha\beta$ is the required collineation.

We may restate Lemma 2 in a weaker form as follows:

COROLLARY. *Let* Π *be a doubly transitive collineation group of* S_k *and let* H_{k-1} *be any hyperplane of* Π. *Then* $\Pi(H_{k-1})$ *is transitive on the points of* S_k *not on* H_{k-1} *and also* $\Pi(H_{k-1})$ *is transitive on non-incident point-hyperplane pairs of* H_{k-1}.

THEOREM 1. *Let* Π *be a collineation group of a finite projective space* S_k. *Then if* Π *contains a non-trivial elation (homology) and if* Π *is transitive on incident (non-incident) point-hyperplane pairs of* S_k, Π *contains the little projective group of* S_k.

(i) We first consider the case where Π contains an elation and is transitive on incident point-hyperplane pairs. For all points P_0 and hyperplanes H_{k-1} in S_k, the groups of (P_0, H_{k-1})-elations in Π are all conjugate in Π, hence have the same order greater than 1. If we first fix H_{k-1}, we obtain from Result VI all elations with axis H_{k-1}, hence by taking all hyperplanes of S_k it follows that Π contains all elations of S_k.

(ii) We now consider the case where Π contains a homology and is transitive on non-incident point-hyperplane pairs in S_k. In this case an argument analogous to the above with an appeal to Result VII proves the theorem.

From Lemma 1 and this theorem we obtain immediately the following corollary.

COROLLARY 1. *If* Π *is a collineation group of a finite projective space* S_k *transitive on incident point-hyperplane pairs and if* Π *contains a homology, then* Π *contains the little projective group of* S_k.

Also, by combining Theorem 1 with Lemma 2, we obtain immediately the following corollary.

COROLLARY 2. *If* Π *is a doubly transitive collineation group of a finite projective space* S_k *and if* Π *contains a non-trivial perspectivity, then* Π *contains the little projective group of* S_k.

§ 5. Doubly transitive collineation groups

The following lemma is important for a more detailed knowledge of doubly transitive collineation groups.

LEMMA 3. *Let Π be a doubly transitive collineation group of a finite projective space S_k and let P_2 be any plane of S_k. Then $\Pi(P_2)$, as a collineation group of P_2, contains the little projective group of P_2.*

When $k=2$ this lemma follows from Result IX. We shall henceforth assume $k \geqq 3$.

Let M_{k-3} be any subspace of dimension $k-3$ in S_k, let L_{k-2} be any subspace of dimension $k-2$ containing M_{k-3} and let H_{k-1} be any hyperplane containing L_{k-2}. Now consider the group $\Pi(H_{k-1}, L_{k-2})$. In view of the corollary of Lemma 2, this group is transitive on the points of H_{k-1} not on L_{k-2}. Let this group split the points of L_{k-2} into s transitive classes. Thus $\Pi(H_{k-1}, L_{k-2})$ splits the points of H_{k-1} into $1+s$ transitive classes, hence also the hyperplanes of H_{k-1} into $1+s$ transitive classes. Then the hyperplanes of H_{k-1} distinct from L_{k-2} split into s transitive classes. Now regarding $\Pi(H_{k-1}, L_{k-2})$ as a collineation group of L_{k-2}, it follows that this group splits the hyperplanes of L_{k-2} into s transitive classes. Thus all the hyperplanes of H_{k-1} containing M_{k-3} and distinct from L_{k-2} belong to one transitive class. Hence $\Pi(H_{k-1}, L_{k-2}, M_{k-3})$ is transitive on the hyperplanes of H_{k-1} distinct from L_{k-2} and containing M_{k-3}.

Since double transitivity is a dual property, we may dualize the last result to obtain:

If P_2 is any plane of S_k and Q_1 any line of P_2 and R_0 any point of Q_1, then $\Pi(P_2, Q_1, R_0)$ is transitive on the lines through R_0 distinct from Q_1 in P_2. The following steps are easily verified:

(i) If R_0 is any point of P_2, then $\Pi(P_2, R_0)$ is doubly transitive on the lines of P_2 through R_0.

(ii) $\Pi(P_2)$ is transitive on the lines of P_2.

(iii) $\Pi(P_2)$ is transitive on the points of P_2.

(iv) $\Pi(P_2)$ is doubly transitive on the lines of P_2.

The lemma now follows by using Result IX.

COROLLARY. *If Q_1 is any line of S_k, then $\Pi(Q_1)$ is triply transitive on the points of Q_1.*

THEOREM 2. *Let Π be a doubly transitive collineation group of a finite projective space S_k. Then any normal subgroup of Π, not the identity, is also doubly transitive on S_k.*

When $k=2$ it follows from Result IX that Π contains the little projective group of the plane, and the theorem now follows from Result X.

Henceforth we shall assume that $k \geqq 3$. Also let n be the order of S_k and let Σ be a normal subgroup of Π, with $\Sigma \neq 1$. The proof will be carried out in a number of steps. We shall make repeated use of result II.

Step I. n_k is not a power of 2.

When n is even or when n is odd and k is even, n_k is odd. Hence it only remains to consider the case n is odd and k is odd. Now $n_3=n^3+n^2+n+1=(n^2+1)(n+1)=\{(n+1)^2-2n\}\{n+1\}$ and it is easily seen that this cannot be a power of 2. Now let $l=2m-1$ be the least integer greater than 3 for which n_k is a power of 2. $n_l=(n^{2m}-1)/(n-1)=(n^m+1)(n^m-1)/(n-1)=(n^m+1)n_{m-1}$, hence n_{m-1} is a power of 2. Since n_2 is odd, $l\neq 5$. We have shown that n_3 is not a power of 2, hence $l\neq 7$. If $l\geqq 9$, then $m-1>3$, contradicting our assumption that l is the least integer greater than 3 for which n_l is a power of 2.

Step II. 2_k, $k>1$, is not a power of 3.

$2_k=2^{k+1}-1$, hence if 2_k is a power of 3, then $2^{k+1}\equiv 1\ (3)$ and k is odd. Let $l=2m-1$ be the least odd integer greater than 1 for which 2_k is a power of 3. Now $2_l=2^{2^m}-1=(2^m+1)(2^m-1)=(2^m+1)2_{m-1}$, hence 2_{m-1} is a power of 3. Now $2_3=15$, hence $l>3$. If $l>3$, then $m-1>1$, contradicting our assumption that l is the least integer greater than 1 for which 2_l is a power of 3.

Step III. Σ is not sharply transitive on S_k.

Since Π is doubly transitive on S_k, it follows from result II that Σ is transitive on the points of S_k. We wish to show that if S_0 is any point of S_k, then $\Sigma(S_0)\neq 1$.

Since n_k is not a power of 2, the order of Σ is not a power of 2, hence Σ contains an element σ of odd order. Let $T_0=S_0\sigma$ and $U_0=T_0\sigma$. We shall deal separately with the case S_0, T_0, U_0 non-collinear and the case S_0, T_0, U_0 collinear.

We must first make an observation regarding the case $n=2$. Since n_k is odd, it follows from Step II that n_k has a prime factor greater than 3, say s. Now let σ be an element of Σ of order s. If S_0, T_0, U_0 are defined as before, then S_0, T_0, U_0 cannot be collinear, since otherwise σ fixes the line S_0, T_0, U_0 and the order of σ would be 2 or 3.

(i) *S_0, T_0, U_0 non-collinear.*

Let P_2 be the plane containing these points. Then by Lemma 3 there exists an element $\pi\in\Pi(P_2)$ which fixes S_0 and T_0 but does not fix U_0. Now consider the element $\varrho=\pi\sigma\pi^{-1}\sigma^{-1}$. Clearly $\varrho\in\Sigma$, also $S_0\varrho=S_0$, hence $\varrho\in\Sigma(S_0)$. Also $T_0\varrho\neq T_0$, hence $\Sigma(S_0)\neq 1$.

(ii) *S_0, T_0, U_0 collinear.*

Let Q_1 be the line containing these points. We may assume $n>2$. It follows from Lemma 3 that $\Pi(Q_1)$ contains an element π such that π fixes S_0 and T_0 but does not fix U_0. Now, as in case (i), consideration of $\pi\sigma\pi^{-1}\sigma^{-1}$ establishes the result.

Consideration of the order of Σ shows that if Σ is not sharply transitive on the points of S_k, Σ is not sharply transitive on the hyperplanes of S_k.

Step IV. For all $S_{k-2} \in S_k$, $\Sigma(S_{k-2})$ is doubly transitive on the hyperplanes containing S_{k-2}.

Let H_{k-1} be any hyperplane of S_k. $\Sigma(H_{k-1})$ is a normal subgroup of $\Pi(H_{k-1})$. Since, by Lemma 3, $\Pi(H_{k-1})$ is transitive on the points (hyperplanes) of H_{k-1}, it follows that $\Sigma(H_{k-1})$ will split the points (hyperplanes) of H_{k-1} into, say, r transitive classes each with the same number of elements, say u where $u \mid n_{k-1}$. Similarly, since $\Pi(H_{k-1})$ is transitive on the points not on H_{k-1}, $\Sigma(H_{k-1})$ will split the points not on H_{k-1} into, say, s transitive classes each with the same number of elements, say v where $v \mid n^k$.

Since $\Sigma(H_{k-1}) \neq 1$, it follows that $v > 1$. Clearly $(v, u) = 1$. Let U_{k-2} be any hyperplane of H_{k-1}. Then $\Sigma(H_{k-1}, U_{k-2})$ will by result I still split the points not on H_{k-1} into s transitive classes, each with v elements.

Now let P_0 and Q_0 be any two points not on H_{k-1} which lie in the same transitive class under $\Sigma(H_{k-1})$. Let L_{k-1} be a hyperplane such that $P_0 \in L_{k-1}$ and $Q_0 \notin L_{k-1}$ and let $R_{k-2} = L_{k-1} \cap H_{k-1}$. Then $\Sigma(H_{k-1}, R_{k-2})$ will by our previous observation still map P_0 onto Q_0, hence will not leave L_{k-1} fixed. Therefore $\Sigma(R_{k-2})$ considered as a permutation group on the hyperplanes containing R_{k-2} is not the identity. The dual of the corollary of Lemma 3 states $\Pi(R_{k-2})$ is triply transitive on the hyperplanes containing R_{k-2}. Hence $\Sigma(R_{k-2})$ is transitive on the hyperplanes containing R_{k-2}, and the above argument has shown that $\Sigma(R_{k-2})$ is not sharply transitive, hence $\Sigma(R_{k-2})$ is doubly transitive on the hyperplanes containing R_{k-2}. Since Π is transitive on the S_{k-2} of S_k and Σ is normal in Π, Step IV follows by taking conjugates of $\Sigma(R_{k-2})$ in Π.

Step V. If H_{k-1} is any hyperplane of S_k, $\Sigma(H_{k-1})$ is transitive on the points not lying on H_{k-1}.

Using the notation of Step IV, $\Sigma(H_{k-1})$ splits the points of S_k into $r+s$ transitive classes. Now if R_{k-2} is any hyperplane of H_{k-1} we have shown that $\Sigma(H_{k-1})$ is transitive on all hyperplanes of S_k containing R_{k-2} and distinct from H_{k-1}. Hence $\Sigma(H_{k-1})$ splits the hyperplanes distinct from H_{k-1} into r transitive classes, hence splits the hyperplanes of S_k into $r+1$ transitive classes. Since by Result IV $r+s=r+1$, it follows that $s=1$, *i.e.* that $\Sigma(H_{k-1})$ is transitive on the points not lying on H_{k-1}.

Step VI. If H_{k-1} is any hyperplane of S_k and R_{k-2} is any hyperplane of H_{k-1}, then $\Sigma(H_{k-1}, R_{k-2})$ is transitive on the points of H_{k-1} not lying on R_{k-2}.

Let L_{k-1} be any hyperplane of S_k such that $R_{k-2} = L_{k-1} \cap H_{k-1}$. Then $\Sigma(L_{k-1})$ is transitive on the points not lying on L_{k-1}, hence, as in Step IV, it follows that $\Sigma(L_{k-1}, R_{k-2})$ is also transitive on the points not lying on L_{k-1}. Now if P_0 and Q_0 are any two points of H_{k-1} not lying in L_{k-1}, there exists an element $\sigma \in \Sigma(L_{k-1}, R_{k-2})$ such that $P_0\sigma = Q_0$. Clearly σ fixes H_{k-1}, hence $\sigma \in \Sigma(L_{k-1}, H_{k-1})$. Therefore $\Sigma(L_{k-1}, H_{k-1})$ has the desired property, hence also the larger group $\Sigma(H_{k-1}, R_{k-2})$.

Step VII. Σ is transitive on all S_{k-2} in S_k.

Let H_{k-1} be any hyperplane of S_k and let P_0 and Q_0 be any two distinct points of H_{k-1}. Further, let R_{k-2} be a hyperplane of H_{k-1} such that $P_0, Q_0 \notin R_{k-2}$. By Step VI there exists an element of $\Sigma(H_{k-1}, R_{k-2})$ mapping P_0 onto Q_0, hence $\Sigma(H_{k-1})$ is transitive on the points of H_{k-1}, hence also on the hyperplanes of H_{k-1}. Since Σ is transitive on the hyperplanes of S_k, it immediately follows that Σ is transitive on all $S_{k-2} \in S_k$.

Theorem 2 is now an immediate consequence of combining Steps IV and VII.

Any collineation group of a projective space of dimension greater than 2 may be represented by semilinear transformations. The group of automorphisms of a finite field is well-known to be cyclic, and a little computation shows that the commutator subgroup of any group of semilinear transformations over a finite field will consist only of linear transformations, in fact only of unimodular linear transformations. Since every doubly transitive collineation group is certainly non-abelian, its commutator subgroup is not the identity, hence by Theorem 2 is also doubly transitive. Consequently it is henceforth generally sufficient to consider the case of doubly transitive collineation groups which are subgroups of the little projective group.

The following lemma will be required in the proof of the next theorem.

LEMMA 4. *Let Σ be the little projective group of a finite projective space S_k of order n. Then Σ contains non-trivial homologies if and only if $n-1 \mid k+1$. Also Σ is the full projective group of S_k if and only if $(n-1, k+1)=1$.*

Let $\mathfrak{F}$ be the field with n elements and let ω be a generator of the multiplicative group of $\mathfrak{F}$. ω has order $n-1$. Now, by a suitable choice of basis in S_k, any homology of S_k may be represented by a $(k+1)\times(k+1)$ diagonal matrix $\boldsymbol{H}$ with diagonal entries $\omega^i, 1, 1, \ldots, 1$ for some integer i. Now $\boldsymbol{H} \in \Sigma$ if and only if there exists a ω^s such that $\omega^s \boldsymbol{H}$ is unimodular, *i.e.* if and only if $\omega^{s(k+1)+i}=1$. Hence Σ contains homologies if, and only if, $s(k+1)+i \equiv 0 (n-1)$ has solutions other than $i \equiv 0 (n-1)$. The lemma is now a restatement of this equation.

THEOREM 3. *Let Π be a collineation group of a finite projective space S_k, $k \geqq 3$, of order n with the following properties:*

(i) *Π is transitive on S_k.*

(ii) *If S_{k-1} is any hyperplane of S_k, then $\Pi(S_{k-1})$, as a collineation group of S_{k-1}, contains the little projective group of S_{k-1}.*

Then, unless $k=3$ and $n=2$, Π contains the little projective group of S_k.

It is an immediate consequence of (i) and (ii) that Π is doubly transitive on S_k. If $\Pi(S_{k-1})$ is not faithful on S_{k-1}, it follows from Corollary 2 of Theorem 1 that Π contains the little projective group of S_k. Consequently we shall henceforth assume that $\Pi(S_{k-1})$ is faithful on S_{k-1}.

If Π' is the commutator subgroup of Π, it follows from Theorem 2 that Π' is doubly transitive on S_k, hence has property (i). Since $\Pi'(S_{k-1}) \neq 1$, it follows from Result X that $\Pi'(S_{k-1})$ has property (ii).

Thus without loss of generality we may assume that Π is a subgroup of the little projective group of S_k. This fact will be used only in Step VI.

We shall break up the proof into a number of steps.

Step I. If P_0 is any point of S_k not on S_{k-1} and if $\Pi(S_{k-1}, P_0)$ contains the little projective group of S_{k-1}, then Π contains the little projective group of S_k.

Let $\Pi^*(S_{k-1})$ be the subgroup of $\Pi(S_{k-1})$ consisting of those elements of $\Pi(S_{k-1})$ which as collineations of S_{k-1} belong to the little projective group of S_{k-1}. $\Pi^*(S_{k-1})$ is clearly normal in $\Pi(S_{k-1})$. Since we are assuming that $\Pi(S_{k-1})$ is faithful on S_{k-1}, it follows that $\Pi^*(S_{k-1}) = \Pi^*(S_{k-1}, P_0)$.

Now let Q_0 be any other point of S_k not on S_{k-1}. By the corollary of Lemma 2 there exists an element $\pi \in \Pi(S_{k-1})$ such that $P_0\pi = Q_0$. Since $\pi^{-1}\Pi^*(S_{k-1}, P_0)\pi = \Pi^*(S_{k-1}, Q_0)$ and $\pi^{-1}\Pi^*(S_{k-1})\pi = \Pi^*(S_{k-1})$, it follows that $\Pi^*(S_{k-1})$ fixes both P_0 and Q_0, hence all points of S_k not on S_{k-1}, which is impossible.

Step II. Let P_0 be any point of S_k not on S_{k-1}. Then $\Pi(S_{k-1}, P_0)$ is transitive on incident point-hyperplane pairs of S_{k-1}.

Using the corollary of Lemma 2, it follows that P_0 lies in a transitive class of n^k points under $\Pi(S_{k-1})$. Also $\Pi(S_{k-1})$ is transitive on the $n_{k-1}n_{k-2}$ incident line-hyperplane pairs of S_{k-1}. Since $(n^k, n_{k-1}n_{k-2}) = 1$, Step II now follows from Result I.

Step III. If P_0 is any point of S_k not on S_{k-1} and $\Pi(S_{k-1}, P_0)$ contains a perspectivity of S_{k-1}, then Π contains the little projective group of S_k.

Using Step II and Theorem 1 and Corollary 1, it follows that $\Pi(S_{k-1}, P_0)$ contains the little projective group of S_{k-1}. Step III now follows from Step I.

In the next step we include the line among the projective spaces.

Step IV. If Σ is the little projective group of a projective space S_k of order n, and $n \leqq k+3$, then, unless $k=1$ and $n=2$ or 3, Σ does not contain a subgroup of index n.

We shall first deal with the case $k=1$. $n=2$ or 3 have been excluded. When $n=4$, Σ is the simple group of order 60 and this is well-known not to have a subgroup of order 15. We shall now consider the case $k \geqq 2$. In this case Σ is always simple. The order of Σ is $n_k n n_{k-1} n^2 n_{k-2} \ldots n^k (n-1)^k / d$ where d is a divisor of $n-1$. Since $n = p^t$ where p is a prime and $(n_i, n) = 1$, for all i, the highest power of p dividing the order of Σ is $n^{k(k+1)/2}$. Also a little computation shows that the highest power of p dividing $n!$ is $p^{\frac{p^t-1}{p-1}}$.

Now if Σ contains a subgroup of index n, Σ can be faithfully represented on n symbols and Σ must be a subgroup of the symmetric group on n symbols. Hence $n^{k(k+1)/2} \mid p^{\frac{p^t-1}{p-1}}$ *i.e.* $tk(k+1)/2 \leqq (p^t-1)/(p-1)$. When $k=2$ this inequality is clearly false. When $k \geqq 3$ $k(k+1)/2 \geqq k+3 \geqq n \geqq \frac{p^t-1}{p-1}$ and the inequality is also false.

Step V. If $\Pi(S_{k-1})$ contains a homology of S_{k-1}, then Π contains the little projective group of S_k.

Let σ be the homology of S_{k-1}. If σ has order s as a collineation of S_{k-1}, then clearly $s \mid n-1$. Since $\Pi(S_{k-1})$ is faithful on S_{k-1}, σ has order s. There are n^k points not on S_{k-1}, and $(s, n^k)=1$, hence σ fixes at least one point not on S_{k-1}. Use of Step III now completes the proof.

Step VI. If $\Pi(S_{k-1})$ does not contain a homology of S_{k-1}, then Π contains the little projective group of S_k.

By the argument at the beginning of this theorem, we may take $\Pi(S_{k-1})$ to consist only of projective collineations.

Since $\Pi(S_{k-1})$ does not contain any homologies, the little projective group of S_{k-1}, being contained in $\Pi(S_{k-1})$, does not contain any homologies. Hence, using Lemma 4, it follows that $n-1 \mid (k-1)+1$ *i.e.* $n-1 \mid k$.

Since $n-1 \mid k$, $(n-1, k-1)=1$, hence by Lemma 4 the little projective group and the full projective group coincide for S_{k-2}. Now let S_{k-2} be a hyperplane of S_k. Since $\Pi(S_{k-1}, S_{k-2})$ contains the little projective group of S_{k-2}, $\Pi(S_{k-1}, S_{k-2})$ contains the full projective group of S_{k-2}. Let the order of the full projective group of S_{k-2} be q. The subgroup of $\Pi(S_{k-1}, S_{k-2})$ fixing S_{k-2} pointwise is the group of perspectivities of S_{k-1} with axis S_{k-2}. There are no homologies; however the elations are transitive on the n^{k-1} points of S_{k-1} not in S_{k-2}, hence the order of $\Pi(S_{k-1}, S_{k-2})=n^{k-1}q$. Now by Lemma 2 $\Pi(S_{k-1}, S_{k-2})$ is transitive on the n^k points of S_k not on S_{k-1}. Hence if P_0 is a point not on S_{k-1}, the order of $\Pi(S_{k-1}, S_{k-2}, P_0)$ is q/n. If this group is not faithful on S_{k-2}, then the group contains an elation of S_{k-1} with axis S_{k-2} and the result follows from Step III.

We now assume that $\Pi(S_{k-1}, S_{k-2}, P_0)$ is faithful on S_{k-2}. This implies that the full projective group — in this case the same as the little projective group — of S_{k-2} has a subgroup of index n. Now we have shown that $n-1 \mid k$, therefore $n-1 \leqq k$, therefore $n \leqq (k-2)+3$. We are now able to apply Step IV to reach a contradiction. Hence $\Pi(S_{k-1}, S_{k-2}, P_0)$ is not faithful on S_{k-2} and Step VI has been proved.

Step V and Step VI exhaust the possibilities for $\Pi(S_{k-1})$ and Theorem 3 has been established.

THEOREM 4. *Let Π be a doubly transitive collineation group of a finite projective space S_k of order n, with $k \leqq 4$. Then, except when $k=3$ and $n=2$, Π contains the little projective group of S_k. When $k=3$ and $n=2$, either*

(i) *Π is isomorphic to the alternating group on 7 letters or*

(ii) *Π is the group of all collineations.*

PROOF. (1) $k=2$. In this case the theorem follows from Result IX. (2) $k=3$. Let P_2 be any plane of S_3. Then, by Lemma 3, $\Pi(P_2)$ contains the little projective group of P_2. We must now deal separately with the cases $n>2$ and $n=2$.

(a) $n>2$. Π satisfies the conditions of Theorem 3, hence Π contains the little projective group of S_3.

(b) $n=2$. If $\Pi(P_2)$ is not faithful on P_2, it follows from Corollary 2 of Theorem 1 that Π contains the little projective group of the space. In

this case the little projective group is the same as the group of all collineations (there are no automorphisms of the field and every linear transformation is unimodular).

If $\Pi(P_2)$ is faithful on P_2, then the order of $\Pi(P_2)$ is 168, the order of the collineation group of the 7-point plane. Since Π is transitive on the 15 planes of the space, it follows that the order of Π is $15.168 = \frac{1}{2}7!$. Theorem 2 shows that this group is simple and it is known that up to isomorphism there exists only one group with this order. This group may be represented by the alternating group on seven letters, A_7. That a collineation group with this order does in fact exist will be shown in the Appendix.

(3) $k=4$. Let P_2 be any plane and Q_3 any 3-space of S_4, with $P_2 \in Q_3$. $\Pi(P_2)$ is clearly transitive on the n_1 3-spaces containing P_2, and by Lemma 3 $\Pi(P_2)$ is transitive on the n_2 points of P_2. Since $(n_2, n_1) = 1$, it follows from Result I that $\Pi(P_2, Q_3)$ is transitive on the points of P_2. Also, by the corollary of Lemma 2, $\Pi(P_2, Q_3)$ is transitive on the points of Q_3 not contained in P_2. Thus $\Pi(P_2, Q_3)$ splits the points of Q_3 into two transitive classes, hence splits the planes of Q_3 into two transitive classes, namely P_2 and the remaining planes of Q_3. Now $\Pi(Q_3)$ is transitive on the planes of Q_3, therefore $\Pi(Q_3)$ is doubly transitive on Q_3. We must now deal separately with the cases $n>2$, $n=2$.

(a) $n>2$. It follows from 2(a) that $\Pi(Q_3)$ contains the little projective group of Q_3. Thus Π satisfies the conditions of Theorem 3 and the result follows.

(b) $n=2$. It follows from 2(b) that $\Pi(Q_3)$, as a collineation group of Q_3, is either the group of all collineations of Q_3 or $\Pi(Q_3) \cong A_7$.

If the former alternative is the case, appeal to Theorem 3 again completes the proof.

Now let us suppose that $\Pi(Q_3)$ as a collineation group of Q_3, is isomorphic to A_7. If $\Pi(Q_3)$ is not faithful on Q_3, it follows as in 2(b) above that Π contains the little projective group of S_4. If $\Pi(Q_3)$ is faithful on Q_3, then the order of Π is $31.\frac{1}{2}.7!$ However, it follows from Lemma 2 that the order of a doubly transitive collineation group is divisible by n^k, *i.e.* in this case by 2^4, and since $2^4 \nmid 31.\frac{1}{2}.7!$, it follows that $\Pi(Q_3)$ cannot be faithful on Q_3.

This completes the proof of Theorem 4.

Appendix 1

In view of Theorem 4, it remains to show that the 15-point space, *i.e.* the three dimensional projective space of order 2, does possess a doubly transitive collineation group isomorphic to A_7[1]). This we shall do in two ways. The first (Part A) uses the well-known isomorphism, due to Jordan (see, for example, DICKSON [5], p. 290), between the full projective group of

[1]) That such a collineation group exists has previously been noticed, though not published, by Prof. N. ITÔ. I am indepted to Dr. B. HUPPERT for pointing this out to me.

this space and A_8. The second (Part B) establishes the result geometrically, and incidentally gives a new proof of Jordan's isomorphism.

A. The full projective group Σ of the 15-point space is isomorphic to A_8, hence has a subgroup Π isomorphic to A_7. Let $\mathfrak{C}$ be an incident point-plane pair. Since Σ is transitive on incident point-plane pairs and there are 15.7 such pairs, the order of $\Sigma(\mathfrak{C})$ is $8.6.4$. Let $\mathfrak{C}$ lie in a transitive class of r elements under Π. Then the order of $\Pi(\mathfrak{C})$ is $\frac{1}{2}.7!/r$ and since $\Pi(\mathfrak{C})$ is a subgroup of $\Sigma(\mathfrak{C})$, it follows that $\frac{1}{2}.7!/r \mid 8.6.4$. This implies that $r=15.7$, *i.e.* that Π is transitive on incident point-plane pairs. Now if P_2 is any plane of the space, then, if $\Pi(P_2)$ is not faithful on P_2, it follows from Theorem 1 that Π is the full projective group of the space, which is clearly impossible. Hence $\Pi(P_2)$ is faithful on P_2, and since the order of $\Pi(P_2)=7.6.4$, $\Pi(P_2)$ is the full projective group of P_2, hence certainly doubly transitive on P_2. Consequently Π is doubly transitive on the space.

B. We may also show directly, by a method for which I am indebted to Professor A. M. GLEASON, that the 15-point space has a doubly transitive collineation group isomorphic to A_7.

Let P_1 be a 7-point plane. We may represent this plane by

1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1
4	5	6	7	1	2	3

where the symbols $1-7$ are the points and the columns the lines. The full projective group Π of collineations of this plane being simple must consist only of even permutations on the symbols $1-7$. The index of Π in A_7 is 15, hence, taking all even permutations of the symbols $1-7$, we obtain 15 planes, $P_1, \ldots, P_{15}$, of which none can be changed into another by a collineation of that plane. Clearly A_7 is a transitive permutation group on these 15 planes.

The 15 planes $P_1, \ldots, P_{15}$ will now be called "points". From the symbols $1-7$, 35 unordered triples may be formed; these will be called "lines". If the 3 symbols of a "line" are collinear in a "point", then the "lines" and "points" will be called incident. Clearly A_7 is a transitive permutation group on the "lines" and A_7 preserves incidence. We now wish to show that the system defined above forms a 15-point projective space.

We first observe that the subgroup of A_7 fixing a "point" is doubly transitive on the "lines" incident with it. Thus, without loss of generality, two concurrent "lines" may be represented by (1, 2, 4) and (1, 5, 6), which are incident with P_1. Any other "point" incident with both these "lines" would be a plane where (1, 2, 4) and (1, 5, 6) are each collinear. However, there are only two such planes, namely P_1 and a plane resulting from an odd permutation of P_1. Thus two "lines" meet in at most one "point".

A "point" is clearly incident with exactly 7 "lines". The "line" (1, 2, 4) is certainly incident with P_1 and the two other "points" resulting from P_1 by cyclic permutation of (3, 6, 7). Thus every "line" is incident with at

least three points. By considering the 7 lines incident with P_1 and using the conclusion of the last paragraph, it is seen that every "line" is incident with exactly three "points" and that every two distinct "points" are incident with a unique "line".

Since every two lines of a plane have a symbol in common, it follows that two "lines" are concurrent if and only if they have exactly one symbol in common. As before, two concurrent "lines" may be taken to be (1, 2, 4) and (1, 5, 6). Now the "lines" which meet both the "lines" in "points" distinct from P_1 are (2, 5, 7), (2, 6, 3), (4, 5, 3) and (4, 6, 7). Any two of these have one symbol in common, hence are concurrent. Thus we have shown that the above system forms a 15-point projective space, and that A_7 is a collineation group of this space. The argument of Part A may now be used to show that A_7 is doubly transitive on the space.

A_7 has index 8 in the full projective group, hence the latter may be represented as a permutation group on 8 symbols, and in view of the order of the group and the fact that it is simple, the representation is the alternating group on 8 symbols. This establishes the isomorphism of Jordan.

Appendix II

Theorem 4 is based on an inductive process. If Π is a doubly transitive collineation group of a projective space S_k and S_{k-1} is a hyperplane of S_k, then $\Pi(S_{k-1})$ is, by Lemma 2, transitive on non-incident point-hyperplane pairs of S_{k-1}. For $k=3$ Result IX shows that the latter conclusion by itself implies that $\Pi(S_{k-1})$ is doubly transitive on S_{k-1}. For $k=4$ a more complicated argument was needed to establish this result, since, as the following example shows, it is not true in general that transitivity on non-incident point-hyperplane pairs implies double transitivity.

By Appendix I the 15-point space has a collineation group Π isomorphic to A_7. Consequently Π has a subgroup Θ isomorphic to A_6. Let $\mathfrak{T}$ be a non-incident point-plane pair of the space. Π is transitive on the 15.8 pairs like $\mathfrak{T}$, hence the order of $\Pi(\mathfrak{T})$ is 21. Since the order of $\Theta(\mathfrak{T})$ must divide the order of $\Pi(\mathfrak{T})$, it is easily seen that Θ is transitive on non-incident point-plane pairs. However, Θ is not doubly transitive on the space since, by Theorem 4, Π is the group of least order with this property.

Appendix III

For projective planes a much stronger form of Theorem 1 may be proved, namely that a collineation group transitive and possessing a perspectivity must contain the little projective group, see WAGNER [11]. The following example shows that this stronger result is not true for spaces of higher dimension.

Again let Σ be the full projective group of the 15-point space. Σ is isomorphic to A_8 and let Π be a subgroup of Σ isomorphic to A_7. By Theorem 1, Π does not contain any perspectivities. In this space every perspectivity is

an elation and has order 2. Thus the perspectivities are represented by permutations on 8 symbols which fix no letter, hence by 4 interchanges. A count on the number of perspectivities and the number of permutations in A_8 consisting of 4 interchanges shows that every permutation of this kind represents a perspectivity.

Now let $A_{2,6}$ be a maximal subgroup of A_8 which splits the 8 symbols into two transitive classes, one containing 2 symbols, the other 6. The order of $A_{2,6}$ is clearly $2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$. Let Ω be the subgroup of Σ isomorphic to $A_{2,6}$. By our earlier observation Ω contains perspectivities of the space; in fact a count shows that there are 15. Also simple computation analogous to that in Appendix I, Part A and Appendix II shows that Ω is transitive on the space.

References

[1] André, J.: Über Perspektivitäten in endlichen projektiven Ebenen. Arch. Math. **6**, 29—32 (1954).

[2] Artin, E.: Geometric Algebra. New York 1957.

[3] Baer, R.: Polarities in finite projective planes. Bull. Amer. Math. Soc. **52**, 77—93 (1946).

[4] Dembowski, H. P.: Verallgemeinerungen von Transitivitätsklassen endlicher projektiver Ebenen. Math. Z. **69**, 59—89 (1958).

[5] Dickson, L. E.: Linear Groups. Dover, New York 1958.

[6] Gleason, A. M.: Finite Fano planes. Amer. J. Math. **78**, 797—807 (1956).

[7] Lüneburg, H.: Zentrale Automorphismen von λ-Räumen. Arch. Math. **12**, 134—145 (1961).

[8] Ostrom, T. G.: Dual transitivity in finite projective planes. Proc. Amer. Math. Soc. **9**, 55—56 (1958).

[9] —, and A. Wagner: On projective and affine planes with transitive collineation groups. Math. Z. **71**, 186—199 (1959).

[10] Veblen, O., and J. W. Young: Projective Geometry I. Boston 1916.

[11] Wagner, A.: On perspectivities of finite projective planes. Math. Z. **71**, 113—123 (1959).

[12] — To appear in Proceedings of Colloquium on Foundations of Geometry. Utrecht 1959.

Imperial College, London

(Eingegangen am 29. November 1960)

Haken, W.
Math. Zeitschr. 76, 427—467 (1961)

Ein Verfahren zur Aufspaltung einer 3-Mannigfaltigkeit in irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten

Von

Wolfgang Haken

Einleitung

Die vorliegende Arbeit löst die Aufgabe, eine gegebene (abgeschlossene, berandete oder unberandete) 3-Mannigfaltigkeit M^3 [1]) durch 2-Sphären in *irreduzible* 3-Mannigfaltigkeiten aufzuspalten (d.h. ein Verfahren anzugeben, nach dem diese Aufspaltung stets in einer beschränkten Anzahl von Schritten erreicht werden kann). Als *irreduzibel* bezeichnen wir nach H. Kneser [*6*] eine 3-Mannigfaltigkeit M^3 dann, wenn jede in $\mathring{M}^3$ [2]) liegende 2-Sphäre ein in M^3 liegendes 3-Element berandet[3]). (Die 3-Sphäre ist in diesem Sinne irreduzibel [*1*].) Das Homöomorphieproblem der 3-Mannigfaltigkeiten ist damit zurückgeführt auf das Homöomorphieproblem der irreduziblen 3-Mannigfaltigkeiten. Außerdem wird die Aufgabe gelöst, von zwei abgeschlossenen Punktmengen in einer 3-Mannigfaltigkeit M^3 zu entscheiden, ob sie miteinander *verkettet* seien, oder ob sie sich in M^3 durch 2-Sphären trennen lassen. Ferner

[1]) Große lateinische Buchstaben bezeichnen stets *endliche polyederartige Punktmengen* (also Summen von endlich vielen endlichen offenen konvexen Raumstücken) in einem linearen Raum $\mathfrak{R}^n$ hinreichend hoher Dimension (s. Reidemeister [*12*]); entsprechend können darunter auch *krummlinige Polyeder* (Alexandroff-Hopf [*2*]) bzw. *Komplexe* im Sinne von Seifert-Threlfall [*13*] verstanden werden (d.h. topologische Bilder von polyederartigen Punktmengen des euklidischen Raumes $\mathfrak{E}^n$).

Die gegebene 3-Mannigfaltigkeit M^3 setzen wir als *abgeschlossen* voraus, d.h. als abgeschlossen in $\mathfrak{R}^n$, bzw., wenn sie speziell ein euklidisches Polyeder oder topologisches Bild eines solchen ist, als *kompakt*. Wie Moise [*8*; *9*] und Bing [*3*] bewiesen haben, sind alle 3-Mannigfaltigkeiten triangulierbar; also erfassen wir mit diesen kombinatorischen Untersuchungen auch alle kompakten 3-Mannigfaltigkeiten im Sinne der mengentheoretischen Topologie (vgl. [*11*]). Von allen betrachteten Punktmengen in M^3 wird vorausgesetzt, daß sie *polyederartig in* M^3 liegen, d.h. daß es eine endliche (gegebenenfalls krummlinige) Simplizialzerlegung von M^3 gibt, so daß sich die betrachteten Punktmengen als Summen von (offenen) Simplizes dieser Simplizialzerlegung darstellen lassen.

Die kombinatorische *Äquivalenzklasse* von M^3 (d.h. die Klasse aller zu M^3 verwandten Polyeder) bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}^3$. Ist M^3 ein euklidisches Polyeder oder topologisches Bild eines solchen, so ist die Äquivalenzklasse $\mathfrak{M}^3$, wie von Moise [*8*; *9*] und Bing [*3*] bewiesen wurde, identisch mit der *Homöomorphieklasse* von M^3.

[2]) $\bar{A}$ bedeutet die *abgeschlossene Hülle* der Punktmenge A (in $\mathfrak{R}^n$ bzw. in M^3), $\dot{A}$ den *Rand* ($\dot{A} = \bar{A} + [\bar{A} - A]$, wobei der Rand $\dot{\bar{A}}$ der abgeschlossenen Punktmenge $\bar{A}$ nach [*12*] bzw. [*2*; *13*] definiert ist), $\mathring{A}$ das *Innere* ($\mathring{A} = A - \dot{A}$). Die Differenz $A - B$ bedeutet die Menge der nicht in B liegenden Punkte aus A (wobei B nicht in A zu liegen braucht).

[3]) Auf Grund des von Papakyriakopoulos [*10*] und Whitehead [*14*] bewiesenen Sphärentheorems ist für eine *irreduzible orientierbare* 3-Mannigfaltigkeit stets $\pi_2 = 0$.

wird das in [5] dargestellte Kreislinienkriterium für *beliebige* 3-Mannigfaltigkeiten verallgemeinert.

Die Ergebnisse werden mit Hilfe der Theorie der Normalflächen [5] und eines Beweisgedankens von H. KNESER [6] erhalten. Die Theorie der Normalflächen beschäftigt sich mit der Bestimmung *inkompressibler* Flächen in 3-Mannigfaltigkeiten. Als „inkompressibel in M^3" bezeichnen wir eine zusammenhängende Fläche M^2 (deren Rand entweder leer ist oder in $\dot{M}^3$ liegt, und deren Inneres in $\mathring{M}^3$ liegt) dann, wenn sie 1. keine triviale 2-Sphäre ist, d.h. keine 2-Sphäre, die ein in M^3 liegendes 3-Element berandet, und wenn sie 2. keinen trivialen Henkel besitzt, d.h. wenn es keine zweiseitig in $\mathring{M}^2$ liegende 1-Sphäre gibt, die ein in $\mathring{M}^3 - M^2$ liegendes (offenes) 2-Element berandet, jedoch kein in M^2 liegendes 2-Element berandet. (Eine nicht zusammenhängende Fläche heißt inkompressibel, wenn ihre sämtlichen Komponenten inkompressibel sind.) Wie bereits in [5] (Einleitung) angemerkt wurde, gilt für *irreduzible* 3-Mannigfaltigkeiten der Satz, daß es zu jeder inkompressiblen unberandeten Fläche eine isotope Normalfläche gibt[4]), daß man also bei irreduziblen 3-Mannigfaltigkeiten durch Betrachtung der Normalflächen *alle* inkompressiblen Flächen erfaßt. Aus diesem Grunde bedeutet es für die weitere Anwendung der Theorie der Normalflächen einen besonderen Vorteil, daß man sich auf Grund der Resultate dieser Arbeit auf die Behandlung irreduzibler 3-Mannigfaltigkeiten beschränken kann. Außerdem gilt für die inkompressiblen Flächen in irreduziblen 3-Mannigfaltigkeiten ein Endlichkeitssatz, der dem von H. KNESER in [6] bewiesenen Endlichkeitssatz für inkompressible 2-Sphären entspricht. (Beide Endlichkeitssätze werden in dieser Arbeit mit Hilfe des von H. KNESER angegebenen Beweisgedankens bewiesen.)

§ 1. Grundbegriffe und Übersicht

Diese Arbeit beschäftigt sich in erster Linie mit der Bestimmung inkompressibler 2-Sphären in einer beliebig vorgelegten 3-Mannigfaltigkeit M^3. Ist in $\mathring{M}^3$ eine 2-Sphäre S^2 gegeben, so haben wir die beiden Fälle zu unterscheiden, daß S^2 *zerlegend* oder *nichtzerlegend* in M^3 liegt. Im ersten Falle besteht $M^3 - S^2$ aus zwei zusammenhängenden Komponenten (im folgenden schreiben wir kurz z-Komponenten) Z_1^3 und Z_2^3. — Zerlegt S^2 nicht, so bezeichnen wir eine kleine Umgebung U^3 von S^2 in M^3 als einen 3-dimensionalen *Henkel* von M^3 (vgl. [10])[5]). Wir können dann $M^3 - U^3$ durch zwei 3-Elemente E_1^3 und E_2^3 (die von den beiden 2-Sphären aus $\dot{U}^3$ berandet werden und im übrigen mit M^3 punktfremd sind) zu einer 3-Mannigfaltigkeit M'^3 ergänzen (vgl. [6; 10]) und nennen diesen Prozeß eine *Henkelreduktion*. Entsprechend sagen wir, daß die Äquivalenzklasse $\mathfrak{M}'^3$ durch eine Henkelreduktion aus $\mathfrak{M}^3$

[4]) Bei geeigneter Verschärfung der Begriffe „irreduzibel" und „inkompressibel" läßt sich ein entsprechender Satz auch für berandete Flächen beweisen. Dieses wird in einer späteren Arbeit ausgeführt werden.

[5]) Modulo der Poincaréschen Vermutung ist für *orientierte* 3-Mannigfaltigkeiten „irreduzibel" äquivalent mit „henkelfrei und *indecomposable*" im Sinne von MILNOR [7].

hervorgehe. Lassen sich an M^3 successive h Henkelreduktionen durchführen, jedoch nicht $h+1$, so bezeichnen wir h als die *Henkelzahl* von M^3 und von $\mathfrak{M}^3$.

Ist in $\mathring{M}^3$ ein System von m 2-Sphären $S_1^2, \ldots, S_m^2$ gegeben (die miteinander punktfremd sind), so bezeichnen wir diese 2-Sphären als *geometrisch unabhängig in* M^3, wenn keine der z-Komponenten von $M^3 - (S_1^2 + \cdots + S_m^2)$ eine gelochte 3-Sphäre[6]) ist, anderenfalls als geometrisch abhängig. Entsprechend bezeichnen wir die 2-Sphäre S_i^2 (i zwischen 1 und m) als geometrisch unabhängig von den übrigen 2-Sphären, wenn diejenigen z-Komponenten von $M^3 - (S_1^2 + \cdots + S_m^2)$, die S_i^2 im Rande enthalten, keine gelochten 3-Sphären sind. Als *einfach* bezeichnen wir das Sphärensystem, wenn jede der 2-Sphären im Rande *zweier* z-Komponenten von $M^3 - (S_1^2 + \cdots + S_m^2)$ liegt. Ein einfaches Sphärensystem nennen wir *vollständig*, wenn jede in $\mathring{M}^3 - (S_1^2 + \cdots + S_m^2)$ liegende 2-Sphäre von $S_1^2, \ldots, S_m^2$ geometrisch abhängig ist.

$S_1^2, \ldots, S_m^2$ sei nun ein einfaches Sphärensystem in M^3. Von besonderer Bedeutung sind die z-Komponenten $Z_1^3, \ldots, Z_p^3$ von $M^3 - (S_1^2 + \cdots + S_m^2)$. Die im Rande von M^3 liegenden 2-Sphären seien $S_{m+1}^2, \ldots, S_{m+l}^2$ (l gegebenenfalls gleich Null). Die Zahl l bezeichnen wir als die *Randsphärenzahl* von M^3 und von $\mathfrak{M}^3$. Wir wählen $2m+l$ 3-Elemente $E_1^3, E_1^{*3}, \ldots, E_m^3, E_m^{*3}, E_{m+1}^3, \ldots, E_{m+l}^3$, deren Innenteile miteinander und mit M^3 punktfremd sind, mit $\dot{E}_i^3 = \dot{E}_i^{*3} = S_i^2$. Durch diese 3-Elemente ergänzen wir $Z_1^3, \ldots, Z_p^3$ zu 3-Mannigfaltigkeiten $M_1^3, \ldots, M_p^3$. Diese 3-Mannigfaltigkeiten bezeichnen wir als *Erzeugende von* M^3 und ihre Äquivalenzklassen als Erzeugende von $\mathfrak{M}^3$. Die Gesamtheit der Erzeugenden $M_1^3, \ldots, M_p^3$ bzw. $\mathfrak{M}_1^3, \ldots, \mathfrak{M}_p^3$ nennen wir eine ($S_1^2 + \cdots + S_m^2$ entsprechende) *Aufspaltung von* M^3 bzw. $\mathfrak{M}^3$ *in Erzeugende*. Ist M^3 eine orientierte 3-Mannigfaltigkeit, so erhalten wir entsprechend *orientierte Erzeugende*. Da die 3-Sphäre offenbar beliebig oft als Erzeugende einer jeden 3-Mannigfaltigkeit auftreten kann, bezeichnen wir sie als *triviale Erzeugende*. Die Erzeugenden sind dann und nur dann sämtlich irreduzibel, wenn das Sphärensystem $S_1^2, \ldots, S_m^2$ in M^3 vollständig ist. Von einem vollständigen Sphärensystem läßt sich also eine Aufspaltung in irreduzible Erzeugende ablesen. (Ferner sind die Erzeugenden dann und nur dann sämtlich nichttrivial, wenn $S_1^2, \ldots, S_m^2$ in M^3 geometrisch unabhängig sind.)

In dieser Arbeit wird ein Verfahren angegeben, in einer beschränkten Anzahl von Schritten die Henkelzahl einer beliebig gegebenen 3-Mannigfaltigkeit M^3 zu bestimmen und ein vollständiges Sphärensystem zu konstruieren.

Wie H. Kneser [6] bemerkt hat, sind die nichttrivialen irreduziblen Erzeugenden und die Henkelzahl von $\mathfrak{M}^3$ eindeutig festgelegt, und umgekehrt ist $\mathfrak{M}^3$ durch die irreduziblen Erzeugenden, die Henkelzahl, die Randsphärenzahl und den Orientierbarkeitscharakter eindeutig bestimmt. Ein Beweis dieses Sachverhaltes ergibt sich in §3 dieser Arbeit. Ungelöst bleibt nach wie vor die Aufgabe, von einer Erzeugenden zu entscheiden, ob sie trivial sei,

---

[6]) Unter einer „gelochten 3-Sphäre in M^3" verstehen wir nach [6] eine Punktmenge, deren abgeschlossene Hülle in M^3 ein von 2-Sphären berandeter Teil einer 3-Sphäre ist.

d.h. ein notwendiges und hinreichendes Äquivalenzkriterium für die 3-Sphäre anzugeben.

Von H. KNESER [6] wurde bewiesen, daß es in einer gegebenen 3-Mannigfaltigkeit M^3 nur eine beschränkte Anzahl von geometrisch unabhängigen 2-Sphären geben kann. Dieser Endlichkeitssatz ist in [6] nur für unberandete 3-Mannigfaltigkeiten formuliert. Der Beweis gilt aber ebenso für berandete 3-Mannigfaltigkeiten und läßt sich ferner für beliebige inkompressible Flächen in irreduziblen 3-Mannigfaltigkeiten erweitern, wie wir in §3 zeigen werden. Mit dem Kneserschen Endlichkeitssatz ist sichergestellt, daß ein vollständiges Sphärensystem in M^3 *existiert*. Auf dieses Resultat aufbauend wird im folgenden ein Verfahren entwickelt, nach dem man ein solches vollständiges Sphärensystem (in einer beschränkten Anzahl von Schritten) *konstruieren* kann. Die hierfür verwendete Normalflächenmethode wurde bereits in [5] dargestellt.

Zu einer beliebigen Zerlegung Γ von M^3 in offene Raumelemente wird eine Normalzerlegung konstruiert, die Normalflächen bezüglich dieser Normalzerlegung werden in Ähnlichkeitsklassen eingeteilt und es werden unter diesen die endlich vielen, eindeutig ausgezeichneten, Fundamentalklassen bestimmt. In dieser Arbeit (§2) werden zunächst einige Sätze über die sog. ξ-Operationen bewiesen, durch die sich nach [5] jede Fläche in eine Normalfläche überführen läßt. §3 enthält die bereits erwähnten Endlichkeits- und Eindeutigkeitssätze. In §4 wird dann gezeigt: Gibt es eine einseitig in $\mathring{M}^3$ liegende projektive Ebene, so sind die Repräsentanten mindestens einer der Fundamentalklassen ebenfalls solche projektiven Ebenen. Eine kleine Umgebung einer derartigen projektiven Ebene wird von einer 2-Sphäre berandet und wir bezeichnen sie als eine 3-dimensionale *Kreuzhaube*; sie kann durch ein 3-Element zum projektiven Raum ergänzt werden. Wir können in M^3 die Kreuzhaube durch ein 3-Element mit gleichem Rand (dessen Inneres mit M^3 punktfremd ist) ersetzen und nennen diesen Prozeß eine *Kreuzhaubenreduktion*. Dieses Verfahren wenden wir so oft an, bis wir eine 3-Mannigfaltigkeit M'^3 erhalten, in der es keine einseitige projektive Ebene mehr gibt. Wurde M'^3 durch k Kreuzhaubenreduktionen erhalten, so nennen wir k die *Kreuzhaubenzahl* von M^3 und von $\mathfrak{M}^3$; $\mathfrak{M}^3$ enthält dann den projektiven Raum k mal als (irreduzible) Erzeugende.

Für die kreuzhaubenfreie 3-Mannigfaltigkeit M'^3 beweisen wir dann weiter: Gibt es in $\mathring{M}'^3$ eine nichtzerlegende 2-Sphäre, so sind die Repräsentanten mindestens einer Fundamentalklasse ebenfalls nichtzerlegende 2-Sphären. Diese Beweise werden nach demselben Prinzip geführt, das bereits in [5] verwendet wurde (s. Abschnitt d der Einleitung von [5]). Gibt es eine nichtzerlegende 2-Sphäre in $\mathring{M}'^3$, so können wir eine Henkelreduktion durchführen und dieses Verfahren so oft wiederholen, bis nach h Schritten eine henkel- und kreuzhaubenfreie 3-Mannigfaltigkeit M''^3 entsteht.

Mit diesen Resultaten lassen sich das in [5] angegebene Bestimmungsverfahren für Bänder minimaler Charakteristik und das daraus folgende Kreis-

linienkriterium in einfacher Weise so verallgemeinern, daß sie für beliebige 3-Mannigfaltigkeiten gelten: In der vorgelegten 3-Mannigfaltigkeit M^3 werden zunächst alle Kreuzhauben und Henkel reduziert. Die dadurch entstehende 3-Mannigfaltigkeit M'^3 erfüllt die in [5] gemachten Voraussetzungen, so daß das Bestimmungsverfahren angewendet werden kann. Wie sich leicht zeigen läßt, wird die minimale Charakteristik der Bänder, die sich in eine gegebene, in M^3 verlaufende Linie einspannen lassen, durch die Kreuzhauben- und Henkelreduktionen nicht geändert. Also ist das in M'^3 konstruierte Band minimaler Charakteristik auch von minimaler Charakteristik in M^3.

In §5 können wir bereits eine henkel- und kreuzhaubenfreie 3-Mannigfaltigkeit voraussetzen. Es ließe sich nun leicht beweisen: Gibt es in dieser 3-Mannigfaltigkeit M^3 eine inkompressible 2-Sphäre, so sind auch die Repräsentanten mindestens einer der Fundamentalklassen inkompressible 2-Sphären. Wenn wir entscheiden könnten, ob eine vorgelegte 2-Sphäre in M^3 inkompressibel sei, so könnten wir damit feststellen, ob es in M^3 eine inkompressible 2-Sphäre gebe und M^3 bei positivem Ergebnis in zwei nichttriviale Erzeugende aufspalten; für diese Erzeugenden könnte das Verfahren wiederholt werden, bis schließlich die (nichttrivialen) irreduziblen Erzeugenden erhalten würden. Da aber bisher kein notwendiges und hinreichendes Äquivalenzkriterium für das 3-Element (bzw. für die 3-Sphäre) bekannt ist, können wir im allgemeinen nicht entscheiden, ob eine 2-Sphäre in M^3 kompressibel sei. Wir können daher auf diesem Wege nicht in jedem Falle zu einem vollständigen Sphärensystem gelangen.

Mit etwas größerem Aufwand läßt sich jedoch folgendes beweisen: Es existiert in M^3 ein vollständiges Sphärensystem, so daß jede der 2-Sphären in einer der Fundamentalklassen liegt[7]). Damit können wir, von den Fundamentalklassen ausgehend, ein Sphärensystem in M^3 konstruieren, das mit Sicherheit vollständig ist (jedoch im allgemeinen nicht geometrisch unabhängig).

Das Bestimmungsverfahren für ein vollständiges Sphärensystem gestattet insbesondere die Entscheidung, ob s gegebene (miteinander punktfremde) abgeschlossene Punktmengen $P_1, \ldots, P_s$ in einer beliebigen 3-Mannigfaltigkeit M^3 miteinander verkettet seien; wir bezeichnen $P_1, \ldots, P_s$ als *miteinander verkettet in* M^3, wenn folgendes gilt: Sind $S_1^2, \ldots, S_m^2$ beliebige, miteinander und mit $P_1, \ldots, P_s$ punktfremde 2-Sphären in M^3, so liegen $P_1, \ldots, P_s$ stets in einer und derselben z-Komponente von $M^3 - (S_1^2 + \cdots + S_m^2)$[8]).

---

[7]) Zu dem in dieser Arbeit gegebenen Beweis bemerkte H. Schubert, daß sich bei anderer Fassung die Voraussetzung der Henkelfreiheit von M^3 vermeiden läßt und zugleich ein anderer Beweis des Kneserschen Endlichkeitssatzes erhalten werden kann.

[8]) „verkettet" ist in diesem Sinne das Gegenteil von *geometrical splittable* (s. [10]). Ist M^3 *henkelfrei*, so braucht statt des Sphärensystems $S_1^2, \ldots, S_m^2$ nur eine einzelne 2-Sphäre betrachtet zu werden. Denn in diesem Falle ist jede 2-Sphäre in M^3 zerlegend und es gilt: Lassen sich $P_1, \ldots, P_s$ in M^3 durch ein Sphärensystem trennen, so werden sie bereits durch *eine* (geeignete) der 2-Sphären getrennt.

§ 2. Sätze über ξ-Operationen

Ist M^3 eine 3-Mannigfaltigkeit, Γ eine beliebige randtreue Zerlegung von M^3 in offene Raumelemente und Θ eine Normalzerlegung bezüglich Γ, so läßt sich, wie in [5], Kap. I ausgeführt wurde, jede in M^3 liegende 2-Mannigfaltigkeit M^2 durch sog. ξ-Operationen in eine Normalfläche bezüglich Θ überführen (Normalflächensatz). Eine ξ-Operation besteht darin, daß der Durchschnitt von M^2 mit einem (in M^3 liegenden) 3-Element E^3 fortgelassen wird und in die entstandenen Lochränder (in E^3 liegende) 2-Elemente eingesetzt werden; das 3-Element E^3 wollen wir als den *Kern* der ξ-Operation bezeichnen. Für den Normalflächensatz wurde in [5] vorausgesetzt, daß M^2 1. „transversal" in M^3 liegt, d.h. daß die Randlinien von M^2 (falls M^2 berandet ist) in $\dot{M}^3$ verlaufen und $\mathring{M}^2$ in $\mathring{M}^3$ liegt, und daß sich 2. die Randlinien von M^2 aus 0- und 1-Elementen aus Γ zusammensetzen lassen. (Daß sich die Voraussetzung 2 bei geeigneter Verallgemeinerung des Begriffes „ξ-Operation" vermeiden läßt, wurde bereits in [5] angemerkt, soll aber erst in einer späteren Arbeit ausgeführt werden.) In diesem Paragraphen beweisen wir eine Reihe von Sätzen, die zum Teil bereits in [5] angekündigt wurden und besagen, daß gewisse für M^3 charakteristische Eigenschaften einer Fläche durch ξ-Operationen nicht verloren gehen. Die beiden wichtigsten dieser Sätze besagen: 1. Ist M^3 irreduzibel und M^2 eine inkompressible Fläche, so entsteht durch ξ-Operationen stets (unter anderem) eine zu M^2 isotope Fläche; 2. Ist M^3 beliebig und M^2 ein vollständiges Sphärensystem, so geht M^2 durch ξ-Operationen stets in ein vollständiges Sphärensystem über. Daraus und aus dem Normalflächensatz ergibt sich u.a. die Darstellbarkeit der entsprechenden Flächen als Normalflächen.

Zunächst bemerken wir, daß sich jede ξ-Operation durch eine endliche Folge von einfacheren Operationen ersetzen läßt: Ist E^3 ein 3-Element in M^3, das einen Kreisring K^2 aus M^2 im Rande enthält und im übrigen mit M^2 punktfremd ist (ist also $M^2 E^3 = K^2$, wenn wir den Durchschnitt zweier Punktmengen A und B der Einfachheit halber als Produkt AB schreiben), so nennen wir die Ersetzung von $\mathring{K}^2$ durch $\dot{E}^3 - K^2$ eine an M^2 ausführbare *ϱ-Operation in M^3* und das 3-Element E^3 den *Kern* der ϱ-Operation. — Ist E'^3 ein 3-Element in M^3 mit $M^2 E'^3 = \dot{E}'^3$ (ist also die Randsphäre $\dot{E}'^3$ von E'^3 eine z-Komponente von M^2), so nennen wir die Fortlassung von $\dot{E}'^3$ eine an M^2 ausführbare *Sphärenreduktion in M^3* und E'^3 den Kern derselben.

SATZ 1. *In einer beliebigen 3-Mannigfaltigkeit M^3 gilt: Geht M' aus einer 2-Mannigfaltigkeit M^2 durch eine ξ-Operation hervor, so läßt sich M^2 auch durch eine endliche Folge von ϱ-Operationen und Sphärenreduktionen (und isotopen Deformationen) in M' überführen. (Ist E^3 der Kern der ξ-Operation, so lassen sich alle Operationen innerhalb von E^3 durchführen.)*

BEWEIS. E^3 sei der Kern der ξ-Operation; die Schnittlinien von M^2 mit $\dot{E}^3$ seien $L_1^1, \ldots, L_s^1$ (dabei kann s gleich Null sein). In E^3 betrachten wir s miteinander punktfremde 2-Elemente $E_1^2, \ldots, E_s^2$, die von $L_1^1, \ldots, L_s^1$ berandet

werden und im übrigen mit $\dot{E}^3$ punktfremd sind. Diese 2-Elemente wählen wir so, daß sie mit M^2 außer ihren Rändern höchstens noch unberandete Durchdringungslinien gemeinsam haben; (dieses ist stets möglich, da sich etwaige Berührungspunkte, -Kanten oder -Flächenstücke durch kleine isotope Deformationen beseitigen lassen). Sind Durchdringungslinien vorhanden, so zerlegen diese die $E_1^2, \ldots, E_s^2$ in z-Komponenten, deren mindestens eine ein 2-Element E^{*2} ist. Dann wählen wir in M^2 eine kleine Umgebung U^2 von $\dot{E}^{*2}$; U^2 ist ein Kreisring. In die beiden Randlinien von U^2 spannen wir zwei nahe zu E^{*2} benachbarte 2-Elemente E'^2, E''^2 ein (s. Fig. 1)[9]. Die Ersetzung von U^2 durch $E'^2 + E''^2$ ist eine ϱ-Operation, durch die M^2 in eine 2-Mannigfaltigkeit übergeht, die eine Durchdringungslinie mit den $E_1^2, \ldots, E_s^2$ weniger hat als M^2. So verfahren wir weiter, bis wir eine 2-Mannigfaltigkeit M_1^2 erhalten, die mit $\overset{\circ}{E}{}_1^2, \ldots, \overset{\circ}{E}{}_s^2$ punktfremd ist.

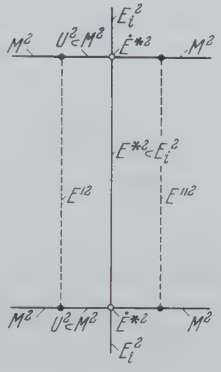


Fig. 1

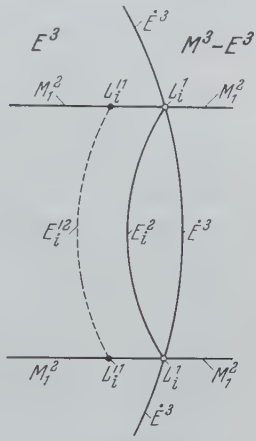


Fig. 2

In $M_1^2 E^3$ wählen wir eine nahe zu L_i^1 ($i = 1, \ldots, s$) benachbarte Linie $L_i'^1$ und spannen in diese ein nahe zu E_i^2 benachbartes 2-Element $E_i'^2$ ein (s. Fig. 2). Dann ist die Ersetzung des zwischen L_i^1 und $L_i'^1$ liegenden Kreisringes aus M_1^2 durch die 2-Elemente E_i^2 und $E_i'^2$ eine ϱ-Operation. Derartige ϱ-Operationen führen wir für alle $i = 1, \ldots, s$ an M_1^2 aus und erhalten dadurch eine 2-Mannigfaltigkeit M_2^2.

Die z-Komponenten von $M_2^2 E^3$ sind die 2-Elemente $E_1^2, \ldots, E_s^2$ und gegebenenfalls endlich viele orientierbare unberandete 2-Mannigfaltigkeiten. Die Quadratsumme der Geschlechter dieser z-Komponenten sei q. Ist $q > 0$, so befindet sich unter den unberandeten z-Komponenten von $M_2^2 E^3$ — ihre Summe werde mit M^{*2} bezeichnet — mindestens eine, die keine 2-Sphäre

[9] *Anmerkung zu den Figuren.* Die dieser Arbeit beigegebenen Figuren sollen die Berandungsverhältnisse der im Text behandelten Punktmengen veranschaulichen und sind folgendermaßen zu verstehen:

Im allgemeinen werden (berandete oder unberandete) 2-Mannigfaltigkeiten dargestellt, die gemeinsame (unberandete) Rand- bzw. Durchdringungslinien besitzen und in einer 3-Mannigfaltigkeit M^3 liegen. Zur Darstellung einer Rand- oder Durchdringungslinie L^1 werden ein oder zwei Punkte gezeichnet; liegt L^1 im Rande einer dargestellten 2-Mannigfaltigkeit M^2, so wird von jedem der L^1 darstellenden Punkte aus eine mit „M^2" bezeichnete Linie gezeichnet; liegt L^1 im Innern von M^2, so werden von jedem Punkte „L^1" aus zwei Linien „M^2" gezeichnet (und zwar so, daß bei einer Durchdringung von M^2 mit einer 2-Mannigfaltigkeit M'^2 auch die darstellenden Linien einander in der Zeichenebene durchdringen). Eine M^2 darstellende Linie kann gegebenenfalls zwei Punkte miteinander verbinden, die geschlossene Linien darstellen. — Entsprechend können Gebiete der Zeichenebene zur Darstellung 3-dimensionaler Teilmannigfaltigkeiten von M^3 dienen.

ist. Dann gibt es in M^{*2} nach FOX [4] eine 1-Sphäre L^{*1}, die kein in M^{*2} liegendes 2-Element berandet, jedoch ein in $\mathring{E}^3 - M^{*2}$ liegendes (offenes) 2-Element E^{*2} berandet. Dieses 2-Element E^{*2} kann so gewählt werden, daß es mit den 2-Elementen $E_1^2, \ldots, E_s^2$ punktfremd ist. Dann wählen wir in M_2^2 eine zu L^{*1} nahe benachbarte Linie $L^{*'1}$ und ein in $L^{*'1}$ eingespanntes, nahe zu E^{*2} benachbartes 2-Element $E^{*'2}$ in E^3 und ersetzen den zwischen L^{*1} und $L^{*'1}$ in M_2^2 liegenden Kreisring durch $E^{*2}+E^{*'2}$. Durch diese ϱ-Operation geht $M_2^2 E^3$ in eine 2-Mannigfaltigkeit über, deren z-Komponenten eine Quadratsumme der Geschlechter haben, die kleiner als q ist. (Denn es wird eine z-Komponente von $M_2^2 E^3$ mit Geschlecht $g>0$ übergeführt entweder in eine zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeit kleineren Geschlechts oder in zwei zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeiten mit Geschlechtern g_1 und g_2, so daß $g_1+g_2=g$ und $g_1 \neq 0$, $g_2 \neq 0$ ist.) So fahren wir fort, bis wir zu einer 2-Mannigfaltigkeit M_3^2 gelangen, deren Durchschnitt mit E^3 nur z-Komponenten vom Geschlecht Null enthält. $M_3^2 E^3$ enthält außer den 2-Elementen $E_1^2, \ldots, E_s^2$ höchstens noch 2-Sphären. Sind solche 2-Sphären vorhanden, so berandet nach ALEXANDER [1] jede von ihnen ein in E^3 liegendes 3-Element; mindestens eines dieser 3-Elemente — es werde mit E^{*3} bezeichnet — ist im Innern mit M_3^2 punktfremd. Dann ist die Fortlassung von $\dot{E}^{*3}$ eine an M_3^2 ausführbare Sphärenreduktion. Durch eine Folge derartiger Sphärenreduktionen geht M_3^2 schließlich in eine Punktmenge M_4 mit $M_4 E^3 = E_1^2 + \cdots + E_s^2$ über, die außerhalb von E^3 mit M^2 übereinstimmt (und entweder eine 2-Mannigfaltigkeit oder die leere Menge ist). M_4 kann nun durch isotope Deformationen innerhalb von E^3 in M' überführt werden. Damit ist Satz 1 bewiesen.

SATZ 2. *Geht M'^2 aus einer 2-Mannigfaltigkeit M^2 durch eine endliche Folge von ξ-Operationen in M^3 hervor, so gilt:*

a) *Ist M^3 irreduzibel, und ist M^2 eine inkompressibel in M^3 liegende 2-Mannigfaltigkeit, so ist eine Komponente von M'^2 in M^3 isotop zu M^2.*

Für beliebige 3-Mannigfaltigkeit M^3 gilt weiter:

b) *Ist M^2 eine einseitig in $\mathring{M}^3$ liegende projektive Ebene, so ist eine z-Komponente von M'^2 ebenfalls eine einseitige projektive Ebene.*

c) *Ist M^2 eine nichtzerlegende 2-Sphäre in $\mathring{M}^3$, so ist (mindestens) eine z-Komponente von M'^2 ebenfalls eine nichtzerlegende 2-Sphäre.*

d) *Ist M^2 eine inkompressible 2-Sphäre, so existiert (mindestens) eine z-Komponente M''^2 von M'^2, die ebenfalls eine inkompressible 2-Sphäre ist.*

e) *Ist M^2 ein geometrisch unabhängiges Sphärensystem in M^3, so existiert eine Komponente M''^2 von M'^2, die ebenfalls ein geometrisch unabhängiges Sphärensystem ist und aus ebensovielen z-Komponenten besteht, wie M^2.*

BEWEIS. Auf Grund von Satz 1 genügt es, den Beweis für den Fall zu führen, daß M'^2 aus M^2 durch eine einzelne ϱ-Operation oder Sphärenreduktion hervorgeht. Nun läßt sich an M^2 überhaupt keine Sphärenreduktion durchführen. Wir brauchen daher nur noch die Auswirkung einer ϱ-Operation zu betrachten.

E^3 sei also der Kern einer ϱ-Operation, durch die M^2 in M'^2 übergeht. Der Kreisring $M^2\dot{E}^3$ werde mit K^2 bezeichnet, die beiden z-Komponenten von $\dot{E}^3-\mathring{K}^2$ mit E'^2 und E''^2.

Beweis von a). Ist M^2 inkompressibel in M^3, so beranden $\dot{E}'^2$ und $\dot{E}''^2$ in M^2 liegende 2-Elemente. Mindestens eines dieser 2-Elemente — es werde mit E^{*2} bezeichnet — ist mit $\mathring{K}^2$ punktfremd (s. Fig. 3). Bei geeigneter Wahl der Bezeichnung ist $\dot{E}^{*2}-\dot{E}'^2$. Dann ist $E^{*2}+E'^2$ eine 2-Sphäre. Ist M^3 irreduzibel, so berandet diese 2-Sphäre ein 3-Element E^{*3} in M^3. Dabei ist $\mathring{E}^{*3}$ mit M^2 punktfremd (da nach [1] und [4] jede in einem 3-Element liegende Fläche kompressibel ist, also keine z-Komponente von M^2 in E^{*3} liegen kann).

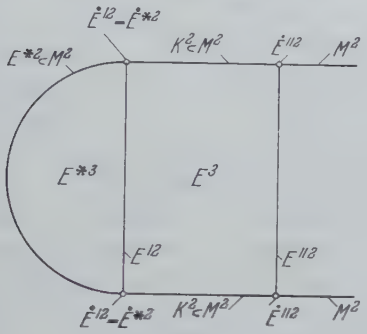


Fig. 3

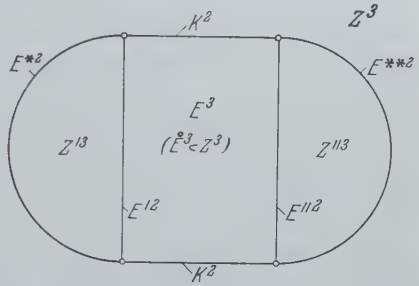


Fig. 4

Damit ist auch $\mathring{E}^{*3}+\mathring{E}'^2+\mathring{E}^3$ ein mit M^2 punktfremdes offenes 3-Element und wird von $K^2+E^{*2}+E'^2$ berandet; also ist $[M^2-(K^2+E^{*2})]+E'^2$ eine zu M^2 isotope z-Komponente von M'^2, w.z.b.w.

Beweis von b). Ist M^2 eine einseitig in M^3 liegende projektive Ebene, so besteht $M^2-\mathring{K}^2$ aus einem 2-Element E^{*2} und einem einseitig in M^3 liegenden Möbiusschen Band M^{*2}. Bei geeignet gewählter Bezeichnung ist $\dot{M}^{*2}=\dot{E}''^2$. Dann ist E''^2+M^{*2} eine einseitig in M^3 liegende projektive Ebene (und eine z-Komponente von M'^2), w.z.b.w.

Beweis von c) und d). Ist M^2 eine 2-Sphäre in $\mathring{M}^3$, so besteht $M^2-\mathring{K}^2$ aus zwei 2-Elementen E^{*2} und E^{**2}, so daß (bei geeigneter Bezeichnung) $\dot{E}^{*2}=\dot{E}'^2$ und $\dot{E}^{**2}=\dot{E}''^2$ ist (s. Fig. 4). M'^2 besteht dann aus den beiden 2-Sphären $S'^2=E'^2+E^{*2}$ und $S''^2=E''^2+E^{**2}$. Damit gilt:

1. Liegen S'^2 und S''^2 zerlegend in M^3, so besteht $M^3-M'^2$ aus drei z-Komponenten Z^3, Z'^3 und Z''^3 (vgl. Fig. 4), so daß (bei geeigneter Bezeichnung) $\mathring{E}^3$ in Z^3 liegt, S'^2 in $\dot{Z}'^3$ und S''^2 in $\dot{Z}''^3$. Dann sind Z^3-E^3 und $(Z'^3+Z''^3+E^3)^\circ$ die z-Komponenten von M^3-M^2, also liegt dann auch M^2 zerlegend in M^3. Daraus folgt Behauptung c).

2. Ist (mindestens) eine z-Komponente von $M^3-S'^2$ und (mindestens) eine z-Komponente von $M^3-S''^2$ ein (offenes) 3-Element, so besteht $M^3-M'^2$

wieder aus drei z-Komponenten Z^3, Z'^3 und Z''^3 (s. Nr. 1 und Fig. 4) und mindestens zwei von diesen sind gelochte 3-Sphären. Daraus folgt, daß mindestens eine der beiden z-Komponenten von $M^3 - M^2$ ein 3-Element ist, also auch M^2 nicht inkompressibel. Daraus folgt Behauptung d).

Beweis von e). Ist M^2 ein geometrisch unabhängiges Sphärensystem in M^3, so liegt der Kreisring K^2 in einer 2-Sphäre S^2 aus M^2. Weiter liegt S^2 in einer z-Komponente von $M^3 - (M^2 - S^2)$, die wir mit K^3 bezeichnen. M'^2 entsteht aus M^2 dadurch, daß S^2 durch die ϱ-Operation in zwei 2-Sphären S'^2 und S''^2 übergeht. Die z-Komponenten von $M^3 - M'^2$ sind die mit K^3 punktfremden z-Komponenten von $M^3 - M^2$ und die z-Komponenten von $K^3 - (S'^2 + S''^2)$. — Wir ergänzen K^3 durch 3-Elemente (die miteinander punktfremd sind, und deren Innenteile mit M^3 punktfremd sind) zu einer randsphärenfreien 3-Mannigfaltigkeit M'^3. Da n. V. keine z-Komponente von $K^3 - S^2$ eine gelochte 3-Sphäre ist, liegt S^2 inkompressibel in M'^3. Damit folgt aus der bereits bewiesenen Behauptung d), daß (mindestens) eine der 2-Sphären S'^2, S''^2 — bei geeigneter Bezeichnung S'^2 — inkompressibel in M'^3 ist. Also ist keine z-Komponente von $K^3 - S'^2$ eine gelochte 3-Sphäre; also ist S'^2 von $M^2 - S^2$ geometrisch unabhängig und $(M^2 - S^2) + S'^2$ damit ein geometrisch unabhängiges Sphärensystem (das aus ebensovielen 2-Sphären besteht wie M^2 und eine Komponente von M'^2 ist). Damit ist e) bewiesen.

SATZ 3. *M^3 sei eine beliebige 3-Mannigfaltigkeit, M^2 sei ein vollständiges Sphärensystem in M^3. M'^2 gehe aus M^2 durch eine endliche Folge von ξ-Operationen hervor. Dann ist M'^2 ebenfalls ein vollständiges Sphärensystem in M^3 und es gilt:*

a) *Sind m und m' die Anzahlen der Sphären von M^2 bzw. M'^2, p und p' die Anzahlen der z-Komponenten von $M^3 - M^2$ bzw. $M^3 - M'^2$, so ist $m - p = m' - p'$.*

b) *Sind $(M_1^3, \ldots, M_p^3)$ und $(M_1'^3, \ldots, M_{p'}'^3)$ zwei M^2 bzw. M'^2 entsprechende Aufspaltungen von M^3 in Erzeugende und sind dabei $M_1^3, \ldots, M_q^3$ nichttrivial und $M_{q+1}^3, \ldots, M_p^3$ trivial, so ist bei geeigneter Numerierung M_i^3 kombinatorisch äquivalent zu $M_i'^3$ für alle $i = 1, \ldots, q$ und $M_{q+1}'^3, \ldots, M_{p'}'^3$ sind trivial.*

Ist M^3 eine orientierte 3-Mannigfaltigkeit, so sind auch die entsprechend orientierten Erzeugenden $M_1^3, \ldots, M_q^3$ und $M_1'^3, \ldots, M_q'^3$ paarweise äquivalent.

BEWEIS. Die 2-Sphären, aus denen M^2 besteht, seien $S_1^2, \ldots, S_m^2$; die z-Komponenten von $M^3 - (S_1^2 + \cdots + S_m^2)$ seien $Z_1^3, \ldots, Z_p^3$. — Nach Satz 1 brauchen nur die beiden Fälle behandelt zu werden, daß M'^2 durch eine einzelne ϱ-Operation aus M^2 hervorgeht und daß M'^2 durch eine einzelne Sphärenreduktion aus M^2 entsteht.

1. Beweis für den Fall einer Sphärenreduktion. Geht M'^2 aus M^2 durch eine Sphärenreduktion hervor, so wird bei geeigneter Numerierung die 2-Sphäre S_m^2 aus M^2 fortgelassen und die z-Komponente Z_p^3 ist ein offenes 3-Element mit $\dot{Z}_p^3 = S_m^2$; außerdem liegt S_m^2 im Rande von Z_{p-1}^3. Dann besteht M'^2 aus den 2-Sphären $S_1'^2 = S_1^2, \ldots, S_{m-1}'^2 = S_{m-1}^2$, und die z-Komponenten von $M^3 - M'^2$ sind $Z_1'^3 = Z_1^3, \ldots, Z_{p-2}'^3 = Z_{p-2}^3$, $Z_{p-1}'^3 = Z_{p-1}^3 + S_m^2 + Z_p^3$. Also ist

M'^2 ein einfaches Sphärensystem in M^3, es gilt die Behauptung a) ($m'=m-1$; $p'=p-1$) und bei Ergänzung von $Z_1^3, \ldots, Z_p^3$ und von $Z_1'^3, \ldots, Z_{p-1}'^3$ zu Erzeugenden $M_1^3, \ldots, M_p^3$ bzw. $M_1'^3, \ldots, M_{p-1}'^3$ ist $M_i'^3$ äquivalent zu M_i^3 für alle $i=1, \ldots, p-1$ und M_p^3 ist trivial. Also gilt auch Behauptung b), und Satz 3 ist damit für den Fall einer Sphärenreduktion bewiesen.

2. Beweis für den Fall einer ϱ-Operation. Geht M'^2 aus M^2 durch eine ϱ-Operation — ihr Kern werde mit E^3 bezeichnet — hervor, so gilt bei geeigneter Numerierung: $\mathring{E}^3$ liegt in Z_p^3; der in M^2 liegende Kreisring K^2 aus $\dot{E}^3$ liegt in S_m^2; S_m^2 liegt in $\dot{Z}_{p-1}^3$ und in $\dot{Z}_p^3$. $\dot{E}^3 - \mathring{K}^2$ besteht aus zwei 2-Elementen E'^2 und E''^2, $S_m^2 - \mathring{K}^2$ besteht aus zwei 2-Elementen E^{*2} und E^{**2}, so daß $\dot{E}'^2 = \dot{E}^{*2}$ und $\dot{E}''^2 = \dot{E}^{**2}$ ist (vgl. Fig. 4). Damit gilt bei geeignet gewählter Bezeichnung weiter: $Z_p^3 - E^3$ besteht aus zwei z-Komponenten Z'^3 und Z''^3, so daß E'^2 in $\dot{Z}'^3$ und E''^2 in $\dot{Z}''^3$ liegt und so daß Z''^3 eine gelochte 3-Sphäre ist. (Denn wäre $Z_p^3 - E^3$ zusammenhängend, oder wären beide z-Komponenten von $Z_p^3 - E^3$ keine gelochten 3-Sphären, so wäre eine nahe zu $E'^2 + E^{*2}$ benachbarte, in $Z_p^3 - E^3$ liegende 2-Sphäre geometrisch unabhängig von M^2, also M^2 nicht vollständig.) Also besteht M'^2 aus den 2-Sphären $S_1'^2 = S_1^2, \ldots, S_{m-1}'^2 = S_{m-1}^2$, $S_m'^2 = E^{*2} - E'^2$, $S_{m+1}'^2 = E^{**2} + E''^2$, und $M^3 - M'^2$ besteht aus den z-Komponenten $Z_1'^3 = Z_1^3, \ldots, Z_{p-2}'^3 = Z_{p-2}^3$, $Z_{p-1}'^3 = Z_{p-1}^3 + \mathring{K}^2 + \mathring{E}^3$, $Z_p'^3 = Z'^3 = Z_p^3 - (Z''^3 + E^3)$, $Z_{p-1}'^3 = Z''^3$. Also ist M'^2 ein einfaches Sphärensystem und es gilt die Behauptung a) ($m'=m+1$, $p'=p+1$). Werden $Z_1^3, \ldots, Z_p^3$ und $Z_1'^3, \ldots, Z_{p+1}'^3$ durch 3-Elemente zu Erzeugenden $M_1^3, \ldots, M_p^3$ bzw. $M_1'^3, \ldots, M_{p+1}'^3$ ergänzt, so ist offenbar $M_i'^3$ kombinatorisch äquivalent zu M_i^3 für alle $i=1, \ldots, p-2$ und $M_{p+1}'^3$ ist trivial; wie sich leicht zeigen läßt, ist auch $M_{p-1}'^3$ äquivalent zu M_{p-1}^3 und $M_p'^3$ äquivalent zu M_p^3: Ist $E_1'^3$ dasjenige der zur Ergänzung von $Z_{p-1}'^3$ eingesetzten 3-Elemente, dessen Rand $E'^2 + E^{*2}$ ist, so ist $\overline{Z}_{p-1}'^3 + E_1'^3$ äquivalent zu $\overline{Z}_{p-1}'^3$, also ist auch $M_p'^3$ äquivalent zu M_{p-1}^3; sind $E_1^3, \ldots, E_s^3$ diejenigen der zur Ergänzung von Z_p^3 eingesetzten 3-Elemente, deren Ränder in $\dot{Z}''^3$ liegen, so ist $\overline{Z}_p'^3$ äquivalent zu $\overline{Z}_p^3 + E_1^3 + \cdots + E_s^3$, also ist auch $M_p'^3$ äquivalent zu M_p^3. Damit ist auch Behauptung b) bewiesen und der Beweis von Satz 3 für den Fall einer ϱ-Operation vollendet.

Mit Nr. 1 und Nr. 2 ist Satz 3 bewiesen.

§ 3. Endlichkeits- und Eindeutigkeitssätze

Mit Hilfe der Sätze 2 a) und 2 e) des vorigen Paragraphen und des Hauptsatzes 1 aus [5] können wir nun zwei Endlichkeitssätze beweisen, die besagen, daß es in einer 3-Mannigfaltigkeit M^3 nur eine beschränkte Anzahl miteinander punktfremder inkompressibler Flächen geben kann, ohne daß mindestens zwei von ihnen topologisch parallel zueinander sind. *Topologisch parallel in* M^3 nennen wir zwei Flächen M_1^2, M_2^2 dann, wenn es eine z-Komponente M'^3 von $M^3 - (M_1^2 + M_2^2)$ gibt, über die sich M_1^2 isotop in M_2^2 verschieben läßt. Von H. Kneser wurde in [6] eine Methode angegeben, nach der man Sätze dieser Art beweisen kann: Man betrachtet ein beliebiges System

von miteinander punktfremden Flächen (in [6] 2-Sphären) in M^3 und eine beliebig gewählte Zerlegung Ω (in [6] eine Simplizialzerlegung) von M^3; dann ändert man das Flächensystem so ab, daß es einerseits die Elemente aus Ω in einer einfachen Weise schneidet und daß andererseits seine wesentlichen topologischen Eigenschaften erhalten bleiben; schließlich betrachtet man die durch das abgeänderte Flächensystem bewirkte Unterteilung von Ω und stellt fest, daß sie nur eine beschränkte Anzahl von 3-dimensionalen Elementen enthalten kann, die nicht „Prismen" sind; daraus folgt das Weitere. — Wir verwenden als Zerlegung Ω eine Normalzerlegung Θ von M^3 und als Normalform für das Flächensystem die Normalflächeneigenschaft. Ist Q^3 ein P-, K- oder F-Raumstück aus Θ, und sind Q_1^2 und Q_2^2 zwei miteinander punktfremde und bezüglich Θ zueinander ähnliche Normalflächenstücke in $\overline{Q}^3$, so bezeichnen wir die zwischen Q_1^2 und Q_2^2 liegende z-Komponente von $Q^3-(Q_1^2+Q_2^2)$ als ein *P-, K-*, bzw. *F-Normalprisma (bezüglich Θ)*. Dann beweisen wir einen Endlichkeitssatz über Normalflächen, aus dem sich [zusammen mit Satz 2 a), 2 e) und dem Normalflächensatz] die Endlichkeitssätze für inkompressible Flächen ergeben. Aus den Endlichkeitssätzen ergibt sich unmittelbar die *Existenz* eines vollständigen Sphärensystems in jeder beliebigen 3-Mannigfaltigkeit M^3 (s. [6]). Mit Hilfe des Satzes 3 läßt sich außerdem leicht die *Eindeutigkeit* der Aufspaltung von $\mathfrak{M}^3$ in irreduzible Erzeugende (bis auf triviale Erzeugende) beweisen. Das heißt: Sind zwei beliebige vollständige Sphärensysteme in M^3 gegeben, so sind die *nichttrivialen* Erzeugenden der entsprechenden Aufspaltungen von M^3 paarweise kombinatorisch äquivalent; ferner läßt sich die Henkelzahl von M^3 (und $\mathfrak{M}^3$) von jedem beliebigen vollständigen Sphärensystem ablesen als Anzahl der 2-Sphären minus Anzahl der in der entsprechenden Aufspaltung vorkommenden Erzeugenden plus Eins. Umgekehrt läßt sich zeigen, daß $\mathfrak{M}^3$ durch die nichttrivialen irreduziblen Erzeugenden, die Henkelzahl, die Randsphärenzahl und den Orientierbarkeitscharakter eindeutig bestimmt ist (sofern im Falle einer orientierbaren 3-Mannigfaltigkeit M^3 orientierte Erzeugende angegeben werden), s. [6]. Diese Eindeutigkeitssätze beweisen wir anschließend an die Endlichkeitssätze.

HILFSSATZ 1. *M^3 sei eine beliebige (zusammenhängende, berandete oder unberandete) 3-Mannigfaltigkeit, Γ sei eine beliebige randtreue Zerlegung von M^3 in offene Raumelemente, Θ sei eine Normalzerlegung bezüglich Γ. $M_1^2, \ldots, M_r^2$ seien r zusammenhängende, miteinander punktfremde Normalflächen bezüglich Θ. Dann gilt:*

a) *Ist M'^3 eine z-Komponente von $M^3-(M_1^2+\cdots+M_r^2)$, die die 3-Elemente aus Θ nur in Normalprismen schneidet, so liegt einer der drei folgenden Fälle vor:*

I. *$\overline{M}'^3-M'^3$ besteht aus zwei Flächen $M_{i_1}^2$, $M_{i_2}^2$ (i_1, i_2 zwischen 1 und r), die zweiseitig in M^3 liegen und zueinander topologisch parallel sind.*

II. *$\overline{M}'^3-M'^3$ ist eine Fläche M_i^2 (i zwischen 1 und r), die zweiseitig in M^3 liegt. In diesem Falle gibt es eine einseitig in M'^3 liegende Normalfläche M^{*2}, so daß $\overline{M}'^3$ eine Umgebung von M^{*2} in M^3 ist und M'^3-M^{*2} die 3-Elemente aus Θ ebenfalls nur in Normalprismen schneidet.*

III. *$\overline{M}'^3 - M'^3$ besteht aus zwei Flächen $M^2_{i_1}$, $M^2_{i_2}$ (i_1, i_2 zwischen 1 und r), so daß $M^2_{i_1}$ einseitig in M^3 liegt und $M^2_{i_2}$ zweiseitig. In diesem Falle ist $\overline{M}'^3$ eine Umgebung von $M^2_{i_1}$ in M^3.*

b) *Die (nach [5] endliche und bestimmbare) Anzahl der P-Klassen bezüglich Θ werde mit g bezeichnet. Dann gilt:*

b 1. *Die Anzahl der z-Komponenten von $M^3 - (M^2_1 + \cdots + M^2_r)$ ist mindestens gleich $1 + \frac{r}{2} - g$; d.h. liegen in M^3 mehr als $2g$ miteinander punktfremde Normalflächen, so ist der Außenraum nicht zusammenhängend. Daraus folgt insbesondere, daß mehr als $2g$ einseitig in M^3 liegende Normalflächen nicht miteinander punktfremd sein können.*

b 2. *Ist $r > 6g$, so sind mindestens zwei der Flächen $M^2_1, \ldots, M^2_r$ topologisch parallel in M^3.*

Beweis. Die durch $M^2_1, \ldots, M^2_r$ bewirkte Unterteilung von Θ bezeichnen wir mit Ψ.

Beweis von a).

1. In M'^3 gibt es eine Normalfläche M^{*2}, die wir als *Mittelfläche von M'^3* bezeichnen, die jedes d-dimensionale Element E^d der durch Θ bewirkten Zerlegung $\Theta(M'^3)$ von M'^3 in genau einem $(d-1)$-dimensionalen Element F^{d-1} schneidet [$d = 1, 2, 3$; 0-dimensionale Elemente kommen in $\Theta(M'^3)$ nicht vor]. Man kann M^{*2} folgendermaßen erhalten: Zunächst zeichnet man in jedem 1-Element aus $\Theta(M'^3)$ einen Punkt aus und dann in jedem 2-Element E^2 aus $\Theta(M'^3)$ ein 1-Element, das von den beiden in $\dot{E}^2$ liegenden ausgezeichneten Punkten berandet wird [jedes 2-Element aus $\Theta(M'^3)$ enthält genau zwei 1-Elemente aus $\Theta(M'^3)$ im Rande]. Ist schließlich E^3 ein 3-Element (Normalprisma) aus $\Theta(M'^3)$, so bilden die in $\dot{E}^3$ liegenden 2- und 1-Elemente aus $\Theta(M'^3)$ einen offenen Kreisring und die darin ausgezeichneten 1- und 0-Elemente eine 1-Sphäre; dann zeichnen wir in E^3 ein 2-Element aus, das von dieser 1-Sphäre berandet wird. Die so ausgezeichneten Elemente bilden zusammen die Elemente der Zerlegung $\Theta(M^{*2})$.

2. Nun betrachten wir die Zuordnung α zwischen den Elementen aus $\Theta(M^{*2})$ und den Elementen aus $\Theta(\overline{M}'^3 - M'^3)$, die sich durch folgende Vorschrift ergibt: Liegt ein Element F^{d-1} aus $\Theta(M^{*2})$ in dem Element E^d aus $\Theta(M'^3)$, so werden ihm die beiden in $\dot{E}^d$ liegenden $(d-1)$-Elemente aus $\Theta(\overline{M}'^3 - M'^3)$ zugeordnet und umgekehrt. Diese Zuordnung α besitzt offenbar folgende Eigenschaften: A) Liegt F^e aus $\Theta(M^{*2})$ im Rande von F^d aus $\Theta(M^{*2})$ und sind F'^e und F''^e bzw. F'^d und F''^d die zugeordneten Elemente aus $\Theta(\overline{M}'^3 - M'^3)$, so liegt bei geeignet gewählter Bezeichnung F'^e in $\dot{F}'^d$ und F''^e in $\dot{F}''^d$. B) Einem Element F'^d aus $\Theta(\overline{M}'^3 - M'^3)$ sind entweder zwei Elemente oder ein Element aus $\Theta(M^{*2})$ zugeordnet, je nachdem die F'^d enthaltende z-Komponente von $\overline{M}'^3 - M'^3$ einseitig oder zweiseitig in M^3 liegt.

3. Da M^{*2} zusammenhängend ist, folgt aus der Eigenschaft A) von α, daß $\overline{M}'^3 - M'^3$ entweder ebenfalls zusammenhängend ist, oder aus genau zwei

z-Komponenten besteht, je nachdem M^{*2} einseitig oder zweiseitig in M^3 liegt. Andererseits enthält $\overline{M}'^3 - M'^3$ mindestens eine z-Komponente, die zweiseitig in M^3 liegt, da anderenfalls $\overline{M}'^3 = M^3$ wäre (es ist aber $\overline{M}'^3 \neq M^3$, da nicht alle 3-Elemente aus Ψ Normalprismen sind). Also sind nur drei Fälle möglich: I. $\overline{M}'^3 - M'^3$ besteht aus zwei zweiseitigen z-Komponenten $M^2_{i_1}$, $M^2_{i_2}$; II. $\overline{M}'^3 - M'^3 = M^2_i$ ist zusammenhängend und zweiseitig; III. $\overline{M}'^3 - M'^3$ besteht aus einer einseitigen z-Komponente $M^2_{i_1}$ und einer zweiseitigen $M^2_{i_2}$. Im ersten Falle umfaßt α eine isomorphe Abbildung von $\Theta(M^{*2})$ auf $\Theta(M^2_{i_1})$ und eine isomorphe Abbildung von $\Theta(M^{*2})$ auf $\Theta(M^2_{i_2})$; dabei läßt sich $M^2_{i_1}$ isotop in $M^2_{i_2}$ deformieren, so daß jedes $(d-1)$-Element aus $\Theta(M^2_{i_1})$ über dasjenige d-Element aus $\Theta(M'^3)$ verschoben wird, in dessen Rand es liegt. Im zweiten Falle liegt die Mittelfläche M^{*2} einseitig in M^3, und $\overline{M}'^3$ ist eine Umgebung von M^{*2} in M^3. Denn ist U^3 eine beliebige, im Verhältnis zu Ψ kleine Umgebung von M^{*2} in M^3, so ist $(\dot{U}^3 - \dot{M}^3)^-$ eine zweiseitige Normalfläche in M'^3, und die 3-Elemente aus $\Theta(M'^3 - U^3)$ sind sämtlich Normalprismen; also läßt sich $(\dot{U}^3 - \dot{M}^3)^-$ isotop über $M'^3 - U^3$ in $(\dot{M}'^3 - \dot{M}^3)^-$ verschieben, also ist $\overline{M}'^3$ ebenfalls eine Umgebung von M^{*2} in M^3. Im dritten Falle sind die 3-Elemente aus $\Theta(M'^3 + M^2_{i_1})$ ebenfalls sämtlich Normalprismen, und $M^2_{i_1}$ ist Mittelfläche von $M'^3 + M^2_{i_1}$; also ist (s. Fall II) $\overline{M}'^3$ eine Umgebung von $M^2_{i_1}$ in M^3. Damit ist a) bewiesen.

Beweis von b).

1. Die z-Komponenten von $M^3 - (M^2_1 + \cdots + M^2_r)$ bezeichnen wir mit $M^3_1, \ldots, M^3_s$ $(s \geqq 1)$. Aus der bereits bewiesenen Behauptung a) folgt, daß bei geeigneter Numerierung folgendes gilt:

A) $M^3_1, \ldots, M^3_t$ (t gegebenenfalls gleich Null) schneiden die 3-Elemente aus Θ nur in Normalprismen und enthalten je genau eine zweiseitig in M^3 liegende Normalfläche im Rande; dabei enthält jede dieser Komponenten eine einseitig in M^3 liegende Normalfläche.

B) $M^3_{t+1}, \ldots, M^3_{t+u}$ (u gegebenenfalls gleich Null) schneiden die 3-Elemente aus Θ nur in Normalprismen und enthalten je eine zweiseitige und je eine einseitige Normalfläche im Rande.

C) $M^3_{t+u+1}, \ldots, M^3_{t+u+v}$ (v gegebenenfalls gleich Null) schneiden die 3-Elemente aus Θ nur in Normalprismen und enthalten je zwei zweiseitige Normalflächen im Rande.

D) $M^3_{t+u+v+1}, \ldots, M^3_s$ $(s \geqq t+u+v+1)$ schneiden die 3-Elemente aus Θ nicht nur in Normalprismen.

2. Höchstens $2g$ der Flächen $M^2_1, \ldots, M^2_r$ liegen in $\dot{M}^3_{t+u+v+1} + \cdots + \dot{M}^3_s$.

BEWEIS. Die in $M^2_1 + \cdots + M^2_r$ liegenden P-Normalflächenstücke seien $P^2_1, \ldots, P^2_z$; unter diesen seien $P^2_1, \ldots, P^2_y$ diejenigen, die nicht zwischen zwei bezüglich Θ ähnlichen liegen, d.h. die nicht im Rande je zweier Normalprismen aus Ψ liegen. Offenbar ist $y \leqq 2g$.

Enthält eine Fläche M^2_i (i zwischen 1 und r) keines der Flächenstücke $P^2_1, \ldots, P^2_y$, so liegt auch jedes K- und jedes F-Normalflächenstück aus M^2_i

im Rande von je zwei Normalprismen aus Ψ. Wir betrachten nun alle diejenigen Normalprismen aus Ψ, die Flächenstücke aus M_i^2 im Rande enthalten; diese bilden (zusammen mit ihren nicht in $M_1^2 + \cdots + M_r^2$ liegenden Randelementen) eine oder zwei z-Komponenten von $M^3 - (M_1^2 + \cdots + M_r^2)$, also eine oder zwei der z-Komponenten $M_1^3, \ldots, M_{t+u+v}^3$. Also kann M_i^2 nicht im Rande einer z-Komponente $M_{t+u+v+1}^3, \ldots, M_s^3$ liegen.

Also gibt es unter den Flächen $M_1^2, \ldots, M_r^2$ höchstens $y \leqq 2g$, die im Rande von Komponenten $M_{t+u+v+1}^3, \ldots, M_s^3$ liegen, w.z.b.w.

3. Unter den Flächen $M_1^2, \ldots, M_r^2$ werden die nicht in $M_{t+u+v+1}^3 + \cdots + M_s^3$ liegenden mit $M_1'^2, \ldots, M_w'^2$ bezeichnet und nach Nr. 2 ist $w \geqq r - 2g$. Da jede der Flächen $M_1'^2, \ldots, M_w'^2$ im Rande mindestens einer der z-Komponenten $M_1^3, \ldots, M_{t+u-v}^3$ liegt, und andererseits jede der z-Komponenten $M_1^3, \ldots, M_{t+u+v}^3$ [nach a)] höchstens zwei der Flächen $M_1'^2, \ldots, M_w'^2$ im Rande enthält, ist $t+u+v \geqq \frac{1}{2}w \geqq \frac{1}{2}r - g$. Also ist $s \geqq 1 + \frac{1}{2}r - g$, womit b 1 bewiesen ist.

4. Da es nach der soeben bewiesenen Behauptung b 1 in M^3 höchstens $2g$ miteinander punktfremde Normalflächen geben kann, die einseitig in M^3 liegen, ist (s. Nr. 1) $t + u \leqq 2g$. Also ist nach Nr. 3 $v \geqq \frac{1}{2}r - 3g$. Daraus folgt b 2; denn bei $r > 6g$ ist $v > 0$ und [nach a)] sind die beiden im Rande von M_{t+u+j}^3 $(j = 1, \ldots, v)$ liegenden Normalflächen topologisch parallel. Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Endlichkeitssatz 1 (H. Kneser). *Ist M^3 eine beliebige (zusammenhängende, berandete oder unberandete) 3-Mannigfaltigkeit, so läßt sich eine Zahl g angeben, so daß folgendes gilt: Liegen in M^3 r beliebige, miteinander punktfremde 2-Sphären $S_1^2, \ldots, S_r^2$ und ist $r > 6g$, so ist mindestens eine z-Komponente des Außenraums $M^3 - (S_1^2 + \cdots + S_r^2)$ eine gelochte 3-Sphäre, d.h. $S_1^2, \ldots, S_r^2$ sind geometrisch abhängig in M^3.*

Dabei kann die Zahl g folgendermaßen bestimmt werden: Es werden eine beliebige randtreue Zerlegung Γ von M^3 in offene Raumelemente und eine Normalzerlegung Θ bezüglich Γ gewählt. Dann ist g die (nach [5], Kap. II zu bestimmende) Anzahl der P-Klassen bezüglich Θ.

Beweis. Aus der Annahme, $S_1^2, \ldots, S_r^2$ seien geometrisch unabhängig und r sei größer als $6g$, folgt: Nach [5], Hauptsatz 1 läßt sich $S_1^2 + \cdots + S_r^2$ durch ξ-Operationen in eine Normalfläche bezüglich Θ überführen, also existiert nach Satz 2 e) ein System von r miteinander punktfremden 2-Sphären $S_1'^2, \ldots, S_r'^2$, die Normalflächen bezüglich Θ sind und ebenfalls geometrisch unabhängig in M^3. Dieses steht im Widerspruch zu Hilfssatz 1 b 2, wonach zwei dieser 2-Sphären topologisch parallel sein müssen, also eine zweifach gelochte 3-Sphäre in M^3 beranden, also geometrisch abhängig sind. Also ist die Annahme falsch, w.z.b.w.

Folgerung (H. Kneser). *Ist M^3 eine beliebige (zusammenhängende, berandete oder unberandete) 3-Mannigfaltigkeit, so existiert stets ein vollständiges Sphärensystem in M^3.*

Beweis. Gibt es in M^3 kein geometrisch unabhängiges Sphärensystem, so ist jedes beliebige (in $\mathring{M}^3$ liegende) Sphärensystem vollständig. — Existiert

in M^3 ein geometrisch unabhängiges Sphärensystem, so existiert nach Endlichkeitssatz 1 ein *maximales* geometrisch unabhängiges Sphärensystem in M^3, d.h. ein Sphärensystem M^2, so daß M^2+S^2 stets geometrisch abhängig ist, wenn S^2 eine beliebige 2-Sphäre in $\mathring{M}^3 - M^2$ ist. Ist M^2 nicht einfach, so kann zu jeder 2-Sphäre aus M^2, die im Rande nur einer z-Komponente von $M^3 - M^2$ liegt, eine topologisch parallele hinzugenommen werden. Hierdurch geht M^2 in ein vollständiges Sphärensystem über. Damit ist die Folgerung bewiesen.

ENDLICHKEITSSATZ 2. *Ist M^3 eine beliebige irreduzible (zusammenhängende, berandete oder unberandete) 3-Mannigfaltigkeit, so läßt sich eine Zahl g angeben, so daß folgendes gilt: Liegen in M^3 r beliebige, unberandete*[10]*, inkompressible, miteinander punktfremde 2-Mannigfaltigkeiten $M_1^2, \ldots, M_r^2$, so gilt:*

a) *Der Außenraum $M^3 - (M_1^2+\cdots+M_r^2)$ zerfällt in mindestens $1+\frac{r}{2}-g$ z-Komponenten.*

b) *Ist $r>6g$, so sind mindestens zwei der 2-Mannigfaltigkeiten topologisch parallel in M^3.*

Dabei kann g ebenso bestimmt werden, wie in Endlichkeitssatz 1 angegeben.

BEWEIS. Nach [5], Hauptsatz 1 läßt sich $M_1^2+\cdots+M_r^2$ durch ξ-Operationen in eine Normalfläche überführen und daraus folgt nach Satz 2 a), daß es eine zu $M_1^2+\cdots+M_r^2$ isotope Normalfläche $M_1'^2+\cdots+M_r'^2$ gibt. Damit folgt der Endlichkeitssatz 2 aus Hilfssatz 1 b).

EINDEUTIGKEITSSATZ 1. *M^3 sei eine beliebige (zusammenhängende, berandete oder unberandete) 3-Mannigfaltigkeit; $S_1^2, \ldots, S_m^2$ und $S_1^{*2}, \ldots, S_{m^*}^{*2}$ seien zwei beliebige vollständige Sphärensysteme in M^3; $(M_1^3, \ldots, M_p^3)$ und $(M_1^{*3}, \ldots, M_{p^*}^{*3})$ seien zwei entsprechende Aufspaltungen von M^3 in irreduzible Erzeugende; dabei seien $M_1^3, \ldots, M_q^3$ nichttrivial und $M_{q+1}^3, \ldots, M_p^3$ seien trivial. Dann folgt:*

a) *Es ist $m^*+1-p^*=m+1-p$ gleich der Henkelzahl h von M^3.*

b) *Bei geeigneter Numerierung sind M_i^3 und M_i^{*3} kombinatorisch äquivalent für alle $i=1, \ldots, q$ und $M_{q+1}^{*3}, \ldots, M_{p^*}^{*3}$ sind trivial. Ist M^3 eine orientierte 3-Mannigfaltigkeit, so gilt diese Äquivalenzbeziehung auch für die entsprechend orientierten Erzeugenden.*

BEWEIS. 1. Zunächst läßt sich das Sphärensystem $S_1^2, \ldots, S_m^2$ durch kleine isotope Deformationen so abändern, daß es mit $S_1^{*2}, \ldots, S_{m^*}^{*2}$ höchstens Durchdringungslinien gemeinsam hat. Diese Durchdringungslinien lassen sich nun successive durch ϱ-Operationen beseitigen (vgl. den Beweis von Satz 1). Dadurch entsteht ein mit $S_1^{*2}, \ldots, S_{m^*}^{*2}$ punktfremdes Sphärensystem $S_1'^2, \ldots, S_{m'}'^2$, das nach Satz 3 ebenfalls vollständig ist und folgende Eigenschaften hat: Ist $(M_1'^3, \ldots, M_{p'}'^3)$ eine $S_1'^2+\cdots+S_{m'}'^2$ entsprechende Aufspaltung von M^3, so ist bei geeigneter Numerierung $M_i'^3$ zu M_i^3 kombinatorisch äquivalent für alle $i=1, \ldots, q$, $M_{q+1}'^3, \ldots, M_{p'}'^3$ sind trivial und $m'+1-p'$ ist gleich $m+1-p$.

[10] Nach geeigneter Verschärfung des Begriffes *inkompressibel* und entsprechender Verallgemeinerung des Hauptsatzes 1 aus [5] gilt dieser Endlichkeitssatz auch für berandete 2-Mannigfaltigkeiten, deren Ränder in $\mathring{M}^3$ liegen.

2. Nun gilt allgemein: Ist $S_1''^2, \ldots, S_{m''}''^2$ ein vollständiges Sphärensystem, $(M_1''^3, \ldots, M_{p''}''^3)$ eine entsprechende Aufspaltung von M^3, und sind $S_{m''+1}''^2, \ldots, S_{m''+r}''^2$ r miteinander und mit $S_1''^2, \ldots, S_{m''}''^2$ punktfremde 2-Sphären in $\mathring{M}^3$, so enthält eine $S_1''^2, \ldots, S_{m''+r}''^2$ entsprechende Aufspaltung von M^3 zu jeder 3-Mannigfaltigkeit $M_1''^3, \ldots, M_{p''}''^3$ eine äquivalente und außerdem weitere r triviale Erzeugende. Dieses ergibt sich leicht durch Induktion nach r.

3. Ist also $(M_1^{**3}, \ldots, M_{p^{**}}^{**3})$ eine $S_1'^2 + \cdots + S_{m'}'^2 + S_1^{*2} + \cdots + S_{m^*}^{*2}$ entsprechende Aufspaltung von M^3, so sind nach Nr. 2 bei geeigneter Numerierung einerseits $M_1^{**3}, \ldots, M_{p'}^{**3}$ äquivalent zu $M_1'^3, \ldots, M_{p'}'^3$ und andererseits $M_1^{**3}, \ldots, M_{p^*}^{**3}$ äquivalent zu $M_1^{*3}, \ldots, M_{p^*}^{*3}$. Daraus und aus Nr. 1 folgt, daß $M_1^{*3}, \ldots, M_q^{*3}$ kombinatorisch äquivalent zu $M_1^3, \ldots, M_q^3$ sind und $M_{q+1}^{*3}, \ldots, M_{p^*}^{*3}$ trivial, womit Behauptung b) bewiesen ist. Ferner ist $p^{**} = p' + m^* = p^* + m'$, also $m^* + 1 - p^* = m' + 1 - p' = m + 1 - p$, wie behauptet.

4. Es ist noch zu zeigen, daß $m + 1 - p$ die Henkelzahl h von M^3 ist:

4.1. An M^3 lassen sich $m + 1 - p$ Henkelreduktionen durchführen; denn unter den 2-Sphären $S_1^2, \ldots, S_m^2$ gibt es $m + 1 - p$ — bei geeigneter Numerierung sind diese $S_1^2, \ldots, S_{m-1-p}^2$ —, so daß $M^3 - (S_1^2 + \cdots + S_{m+1-p}^2)$ zusammenhängend ist.

Beweis. S_m^2 liegt (da das Sphärensystem einfach ist) im Rande zweier z-Komponenten des Außenraumes $M^3 - (S_1^2 + \cdots + S_m^2)$. Durch Fortlassen von S_m^2 entsteht ein Sphärensystem, dessen Außenraum aus $p - 1$ z-Komponenten besteht. Ist $p - 1 > 1$, so enthält dieses Sphärensystem (mindestens) eine weitere 2-Sphäre — bei geeigneter Numerierung ist diese S_{m-1}^2 —, die im Rande zweier z-Komponenten von $M^3 - (S_1^2 + \cdots + S_{m-1}^2)$ liegt. Dann lassen wir S_{m-1}^2 fort usw. und gelangen nach insgesamt $p - 1$ Schritten zu dem Sphärensystem $S_1^2, \ldots, S_{m-1-p}^2$ mit den geforderten Eigenschaften, w.z.b.w.

4.2. An M^3 lassen sich nicht $m + 2 - p$ Henkelreduktionen durchführen.

Beweis. Aus der Annahme des Gegenteils folgt: Es gibt in M^3 $m + 2 - p$ miteinander punktfremde 2-Sphären $S_1'''^2, \ldots, S_{m+2-p}'''^2$, so daß $M^3 - (S_1'''^2 + \cdots + S_{m+2-p}'''^2)$ zusammenhängend ist. Ergänzen wir diese $m + 2 - p$ 2-Sphären durch weitere 2-Sphären zu einem vollständigen Sphärensystem $S_1'''^2, \ldots, S_{m'''}'''^2$ (das nach Endlichkeitssatz 1 stets existiert), so besteht $M^3 - (S_1'''^2 + \cdots + S_{m'''}'''^2)$ aus p''' z-Komponenten mit $p''' \leq m''' - (m + 2 - p) + 1 = m''' + p - m - 1$, also ist $m''' + 1 - p''' > m + 1 - p$ im Widerspruch zu Nr. 3, wonach $m''' + 1 - p''' = m + 1 - p$ sein müßte, also ist die Annahme falsch, w.z.b.w.

Folgerung. *Ist M^3 eine beliebige (zusammenhängende, berandete oder unberandete) 3-Mannigfaltigkeit der Äquivalenzklasse $\mathfrak{M}^3$, so existieren endlich viele (gegebenenfalls Null) nichttriviale irreduzible Erzeugende von $\mathfrak{M}^3$ und diese sind (bis auf die Reihenfolge) eindeutig ausgezeichnet.* (Dieses ergibt sich unmittelbar aus der Existenz eines vollständigen Sphärensystems und aus Eindeutigkeitssatz 1.)

Eindeutigkeitssatz 2 (H. Kneser). *Sind M^3 und M'^3 beliebige (zusammenhängende, berandete oder unberandete) 3-Mannigfaltigkeiten, und sind*

$(M_1^3, \ldots, M_p^3)$ und $(M_1'^3, \ldots, M_{p'}'^3)$ Aufspaltungen von M^3 bzw. M'^3 in irreduzible Erzeugende, so sind M^3 und M'^3 dann (und nach Eindeutigkeitssatz 1 auch nur dann) kombinatorisch äquivalent, wenn folgendes gilt:

a) *M^3 und M'^3 besitzen gleichen Orientierbarkeitscharakter.*

b) *M^3 und M'^3 besitzen gleiche Henkelzahl und gleiche Randsphärenzahl.*

c) *Bei geeigneter Numerierung sind die Erzeugenden $M_1^3, \ldots, M_q^3$ nichttrivial und kombinatorisch äquivalent zu $M_1'^3, \ldots, M_q'^3$, und $M_{q+1}^3, \ldots, M_p^3, M_{q+1}'^3, \ldots, M_{p'}'^3$ sind trivial.*

d) *Sind M^3 und M'^3 orientierbar, so gilt bei geeigneter Orientierung von M^3 und M'^3 die unter c) geforderte kombinatorische Äquivalenz auch für die entsprechend orientierten Erzeugenden.*

BEWEIS. Gelten die Beziehungen a), b), c), d), sind h die Henkelzahl und l die Randsphärenzahl von M^3 und M'^3, und sind $R_1^2, \ldots, R_l^2$, bzw. $R_1'^2, \ldots, R_l'^2$ die Randsphären von M^3 und M'^3, so gilt:

1. In M^3 und in M'^3 existieren vollständige Sphärensysteme, die aus 2-Sphären $P_1^2, \ldots, P_h^2, Q_1^2, \ldots, Q_h^2, S_1^2, \ldots, S_q^2$ bzw. $P_1'^2, \ldots, P_h'^2, Q_1'^2, \ldots, Q_h'^2, S_1'^2, \ldots, S_q'^2$ bestehen und die M^3 bzw. M'^3 in z-Komponenten $H_1^3, \ldots, H_h^3, Z^3, Z_1^3, \ldots, Z_q^3$ bzw. $H_1'^3, \ldots, H_h'^3, Z'^3, Z_1'^3, \ldots, Z_q'^3$ zerlegen, so daß folgendes gilt:

I. Z^3 und Z'^3 sind $(2h+l+q)$-fach gelochte 3-Sphären. Es liegen also alle 2-Sphären $P_i^2, Q_i^2, S_j^2, R_k^2$ $(i=1, \ldots, h;\ j=1, \ldots, q;\ k=1, \ldots, l)$ bzw. $P_i'^2, Q_i'^2, S_j'^2, R_k'^2$ in $\dot{Z}^3$ bzw. $\dot{Z}'^3$.

II. In $\dot{Z}_j^3$ liegt die 2-Sphäre S_j^2 und keine weitere 2-Sphäre, in $\dot{Z}_j'^3$ liegt $S_j'^3$ und keine weitere 2-Sphäre, für alle $j=1, \ldots, q$. Dabei ist $\overline{Z}_j^3$ kombinatorisch äquivalent zu $\overline{Z}_j'^3$ (und ist kein 3-Element); sind M^3 und M'^3 orientierbar, so gilt diese Äquivalenz bei geeigneter Orientierung von M^3 und M'^3 auch für die entsprechend orientierten $\overline{Z}_j^3, \overline{Z}_j'^3$.

III. H_i^3 und $H_i'^3$ sind zweifach gelochte 3-Sphären mit $\dot{H}_i^3 = P_i^2 + Q_i^2$ und $\dot{H}_i'^3 = P_i'^2 + Q_i'^2$ für alle $i=1, \ldots, h$.

BEWEIS. In $\mathring{M}^3$ existieren h miteinander punktfremde 2-Sphären $P_1^2, \ldots, P_h^2$, so daß der Außenraum zusammenhängend ist. Zu jeder dieser 2-Sphären P_i^2 wählen wir in $\mathring{M}^3$ eine topologisch parallele 2-Sphäre Q_i^2. Die zwischen P_i^2 und Q_i^2 liegende (offene) zweifach gelochte 3-Sphäre bezeichnen wir mit H_i^3, die Punktmenge $M^3 - (\overline{H}_1^3 + \cdots + \overline{H}_h^3)$ mit $Z_{(1)}^3$.

Ist $Z_{(1)}^3$ eine gelochte 3-Sphäre, so bilden $P_1^2, Q_1^2, \ldots, P_h^2, Q_h^2$ ein vollständiges Sphärensystem in M^3 mit den geforderten Eigenschaften; $(Z^3 = Z_{(1)}^3)$. Nach Eindeutigkeitssatz 1 ist in diesem Falle $q=0$. — Ist $Z_{(1)}^3$ keine gelochte 3-Sphäre, so existiert in $\mathring{Z}_{(1)}^3$ eine 2-Sphäre S_1^2, die $Z_{(1)}^3$ in zwei z-Komponenten $Z_{(2)}^3$ und Z_1^3 zerlegt, so daß in $\dot{Z}_1^3$ keine 2-Sphären außer S_1^2 liegen und $\overline{Z}_1^3$ irreduzibel und kein 3-Element ist. Ist $Z_{(2)}^3$ keine gelochte 3-Sphäre, so existiert in $\mathring{Z}_{(2)}^3$ eine 2-Sphäre S_2^2 mit entsprechenden Eigenschaften, usw. Nach Endlichkeitssatz 1 existiert eine Zahl q^*, so daß $Z_{(q^*)}^3$ eine gelochte 3-Sphäre ist und

$P_1^2, Q_1^2, \ldots, P_h^2, Q_h^2, S_1^2, \ldots, S_{q^*}^2$ ein vollständiges Sphärensystem in M^3. Nach Eindeutigkeitssatz 1 ist daher $q^* = q$, und bei geeigneter Numerierung liefert die Ergänzung von Z_i^3 durch ein 3-Element eine zu M_i^3 äquivalente 3-Mannigfaltigkeit für alle $i = 1, \ldots, q$. Also besitzt das Sphärensystem $P_1^2, \ldots, S_q^2$ in M^3 die geforderten Eigenschaften ($Z^3 = Z_{(q)}^3$).

Genauso verfahren wir in M'^3 und erhalten ein vollständiges Sphärensystem $P_1'^2, \ldots, S_q'^2$. Die so erhaltenen Sphärensysteme besitzen die geforderten Eigenschaften, womit Nr. 1 bewiesen ist.

2. Wir behandeln nun den Fall, daß M^3 und M'^3 orientierbar sind: Dann existieren n.V. kohärente Orientierungen ω und ω' von M^3 und M'^3 und semilineare Abbildungen $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ von $\overline{Z}_1^3$ auf $\overline{Z}_1'^3, \ldots, \overline{Z}_q^3$ auf $\overline{Z}_q'^3$, die die ω bzw. ω' entsprechenden Orientierungen erhalten. Ferner seien $\beta_1, \ldots, \beta_h$ semilineare orientierungserhaltende Abbildungen von $\overline{H}_1^3$ auf $\overline{H}_1'^3, \ldots, \overline{H}_h^3$ auf $\overline{H}_h'^3$. Dann gibt es eine semilineare Abbildung α von $\overline{Z}^3$ auf $\overline{Z}'^3$, die für die 2-Sphären $S_1^2, \ldots, S_q^2, P_1^2, \ldots, Q_h^2$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ bzw. $\beta_1, \ldots, \beta_h$ übereinstimmt. Also bilden $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_q, \beta_1, \ldots, \beta_h$ zusammen eine semilineare Abbildung von M^3 auf M'^3, womit Eindeutigkeitssatz 2 für den orientierbaren Fall bewiesen ist.

3. Nun betrachten wir den Fall, daß M^3 und M'^3 nichtorientierbar sind und dabei (mindestens) eine der Erzeugenden nichtorientierbar ist. Es seien also $Z_1^3, \ldots, Z_r^3$ nichtorientierbar und $Z_{r+1}^3, \ldots, Z_q^3$ orientierbar. α_j sei eine semilineare Abbildung von $\overline{Z}_j^3$ auf $\overline{Z}_j'^3$ (für alle $j = 1, \ldots, q$).

Wir orientieren zunächst alle 3-Simplizes einer (hinreichend feinen) Simplizialzerlegung von M^3. Diese (nichtkohärente) Orientierung ω wählen wir so, daß folgendes gilt:

A) Z^3, alle H_i^3 und alle orientierbaren Z_j^3 sind kohärent orientiert.

B) In den nichtorientierbaren Z_j^3 ($j = 1, \ldots, r$) kehrt sich die Orientierung in 2-dimensionalen (abgeschlossenen) Punktmengen Y_j^2 um, wobei $Z_j^3 - Y_j^2$ zusammenhängend sind.

C) Außer in den Y_j^2 kehrt sich die Orientierung höchstens noch in gewissen 2-Sphären P_i^2 um.

Kehrt sich die Orientierung in einer der 2-Sphären P_i^2 um — z.B. in P_1^2 —, so beseitigen wir diese Umkehrung durch folgende Abänderung („Verlagerung") von Z_1^3 (s. Fig. 5): Wir wählen in $\mathring{Z}^3 + S_1^2 + \mathring{Z}_1^3$ ein 1-Element E^1, das einen Punkt aus S_1^2 mit einem Punkt aus P_1^2 verbindet, Y_1^2 in genau einem Punkte trifft (und zwar durchsetzt, wobei eine kleine Umgebung dieses Punktes in Y_1^2 ein 2-Element sein soll) und S_1^2 in einem weiteren Punkte trifft (durchsetzt). Der Y_1^2 mit P_1^2 verbindende Teil von E^1 sei E^{*1}. Nun sei U^3 eine kleine Umgebung von $\mathring{E}^1 \overline{Z}^3 + P_1^2$ in $\overline{Z}^3$, V^3 eine (im Verhältnis zu $Y_1^2 | S_1^2 | U^3$) kleine Umgebung von $\overline{E}^{*1} + P_1^2$ in $\overline{Z}^3 + \overline{Z}_1^3$ und W^3 eine (im Verhältnis zu $Y_1^2 | S_1^2 | V^3$) kleine Umgebung von $\overline{E}^1 + P_1^2$ in $\overline{Z}_1^3 + V^3$; X^3 sei die abgeschlossene Hülle der E^{*1} enthaltenden z-Komponente von $V^3 - Y_1^2$. Dann ersetzen wir $S_1^2(\dot{U}^3 + \dot{W}^3)$ durch $[(\dot{U}^3 + \dot{W}^3) - (S_1^2 + P_1^2)]$ und $Y_1^2 \dot{X}^3$ durch $[\dot{X}^3 - (Y_1^2 + P_1^2)]$ und orientieren X^3 um. Dadurch wird die Orientierungsumkehrung bei P_1^2

aufgehoben, aus S_1^2 entsteht eine 2-Sphäre $S_1^{(1)2}$, aus Y_1^2 eine Punktmenge $Y_1^{(1)2}$. Entsprechend geht Z_1^3 in $Z_1^{(1)3} = [Z_1^3 + (S_1^2 \dot{U}^3)^\circ + \mathring{U}^3] - W^3$ über und Z^3 in $Z^{(1)3} = (Z^3 + Z_1^3) - \overline{Z}_1^{(1)3}$. Offenbar gibt es eine semilineare Abbildung $\gamma^{(1)}$ von $\overline{Z}_1^3$ auf $\overline{Z}_1^{(1)3}$, die Y_1^2 in $Y_1^{(1)2}$ überführt; (denn ist E^3 ein beliebiges, von P_1^2 berandetes 3-Element, dessen Inneres mit M^3 punktfremd ist, so läßt sich $\overline{Z}_1^3$ in $\overline{Z}^3 + \overline{Z}_1^3 + E^3$ isotop in $\overline{Z}_1^{(1)3}$ verschieben, so daß dabei Y_1^2 in $Y_1^{(1)2}$ übergeht). — So fahren wir fort, bis wir in M^3 zu einem Sphärensystem S_1^{*2}, $S_2^2, \ldots, S_q^2, P_1^2, Q_1^2, \ldots, P_h^2, Q_h^2$ mit z-Komponenten $Z^{*3}, Z_1^{*3}, Z_2^3, \ldots, Z_q^3, H_1^3, \ldots, H_h^3$ des Außenraumes und einer Orientierung ω^* gelangen, die sich nur in den Punktmengen Y_1^{*2} (in Z_1^{*3} liegend), $Y_2^2, \ldots, Y_r^2$ umkehrt. — Völlig analog gehen wir in M'^3 vor und verwenden die entsprechenden Bezeichnungen. Es gibt dann eine semilineare Abbildung α_1^* von $\overline{Z}_1^{*3}$ auf $\overline{Z}_1'^{*3}$.

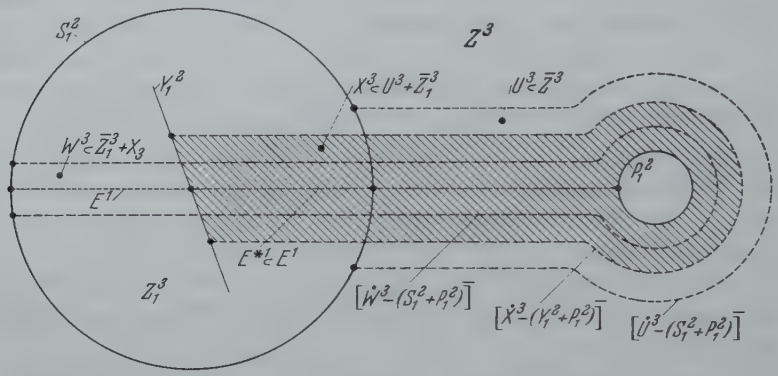


Fig. 5

Wir orientieren nun $\overline{Z}'^{*3} + H_1'^3 + \cdots + H_h'^3$ so, wie es ω'^* entspricht, und $Z_1'^{*3}, Z_2'^3, \ldots, Z_q'^3$ so, wie es der durch $\alpha_1^*, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ übertragenen Orientierung ω^* entspricht. Kehrt sich diese Orientierung in $S_1'^{*2}$ um, so beseitigen wir diese Umkehrung durch Umorientieren von $\overline{Z}'^{*3} + H_1'^3 + \cdots + H_h'^3$; kehrt sich dann die Orientierung in gewissen 2-Sphären $S_j'^2$ (j zwischen 2 und q) um, so beseitigen wir diese Umkehrungen successive nach dem im vorigen Absatz beschriebenen Verfahren durch Verlagerung von $Z_1'^{*3}$. So erhalten wir in M'^3 ein Sphärensystem $S_1'^{**2}, S_2'^2, \ldots, Q_h'^2$ und eine Orientierung ω'^{**}, die sich nur in Punktmengen $Y_1'^{**2}, Y_2'^{**2}, \ldots, Y_r'^{**2}$ umkehrt, die in den z-Komponenten $Z_1'^{**2}, Z_2'^3, \ldots, Z_r'^3$ des Außenraumes liegen. Dabei gibt es semilineare Abbildungen $\alpha_1^{**}, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ von $\overline{Z}_1^{*3}$ auf $\overline{Z}_1'^{**3}, \overline{Z}_2^3$ auf $\overline{Z}_2'^3, \ldots, \overline{Z}_q^3$ auf $\overline{Z}_q'^3$, durch die ω^* in ω'^{**} übergeht, Y_1^{*2} in $Y_1'^{**2}, \ldots, Y_r^2$ in $Y_r'^{**2}$. Nun gibt es semilineare Abbildungen β_i (für alle $i = 1, \ldots, h$) von $\overline{H}_i^3$ auf $\overline{H}_i'^3$, die ω^* in ω'^{**} übertragen, und eine semilineare Abbildung α von $\overline{Z}^{*3}$ auf $\overline{Z}'^{**3}$, die ebenfalls ω^* in ω'^{**} überführt und auf $S_1^{*2}, S_2^2, \ldots, S_q^2, P_1^2, Q_1^2, \ldots, P_h^2, Q_h^2$ mit $\alpha_1^{**}, \alpha_2, \ldots, \alpha_q, \beta_1, \ldots, \beta_h$ übereinstimmt. $\alpha, \alpha_1^{**}, \alpha_2, \ldots, \beta_h$ bilden zusammen eine semilineare Abbildung von M^3 auf M'^3. Damit ist Eindeutigkeitssatz 2 für den betrachteten Fall bewiesen.

4. Schließlich haben wir noch den Fall zu behandeln, daß M^3 und M'^3 nichtorientierbar, jedoch alle Erzeugenden orientierbar sind. Wir gehen ganz ähnlich vor, wie in Nr. 3 dargestellt: In M^3 wählen wir eine (nichtkohärente) Orientierung ω, so daß die Teilmannigfaltigkeiten $\overline{Z}^3 + \overline{Z}_1^3 + \cdots + \overline{Z}_q^3, \overline{H}_1^3, \ldots, \overline{H}_h^3$ jeweils kohärent orientiert sind und daß sich die Orientierung in den 2-Sphären $Q_1^2, \ldots, Q_h^2$ nicht umkehrt. Dann kehrt sich die Orientierung n.V. an mindestens einer der 2-Sphären P_i^2 um — bei geeigneter Numerierung an P_1^2. Kehrt sich die Orientierung noch an einer weiteren 2-Sphäre P_i^2 um — etwa an P_2^2 —, so beseitigen wir diese Orientierungsumkehrung durch eine Verlagerung von H_1^3 (s. Fig. 6): In $H_1^3 + Q_1^2 + \dot{Z}^3$ wählen wir ein offenes 1-Element E^1, das einen Punkt aus P_1^2 mit einem Punkt aus P_2^2 verbindet und Q_1^2 in

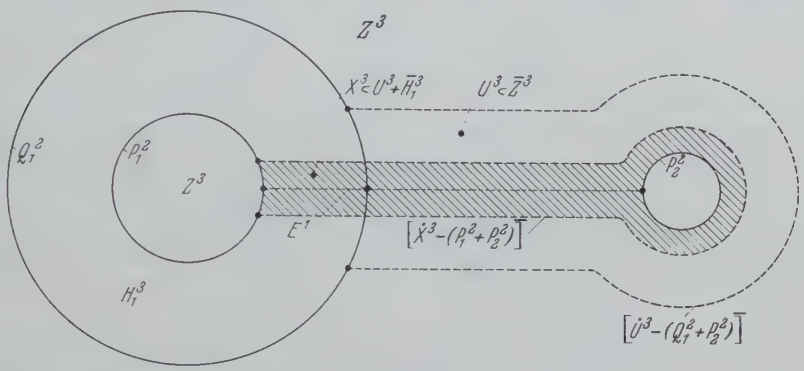


Fig. 6

genau einem Punkte trifft; U^3 sei eine kleine Umgebung von $\overline{E}^1 \overline{Z}^3 + P_2^2$ in $\overline{Z}^3$, X^3 eine kleine Umgebung von $\overline{E}^1 + P_2^2$ in $U^3 + \overline{H}_1^3$; dann ersetzen wir $\dot{U}^3 Q_1^2$ durch $[\dot{U}^3 - (Q_1^2 + P_2^2)]$, sowie $\dot{X}^3 P_1^2$ durch $[\dot{X}^3 - (P_1^2 + P_2^2)]$ und orientieren X^3 um. So fahren wir fort, bis wir ein Sphärensystem $P_1^{*2}, Q_1^{*2}, P_2^2, Q_2^2, \ldots, P_h^2, Q_h^2, S_1^2, \ldots, S_q^2$ (z-Komponenten des Außenraumes $Z^{*3}, H_1^{*3}, H_2^3, \ldots, Z_q^3$) und eine Orientierung ω^* erhalten, die sich nur in P_1^{*2} umkehrt. In M'^3 existiert ein entsprechendes Sphärensystem. — N.V. existieren semilineare Abbildungen α_i von $\overline{Z}_i^3$ auf $\overline{Z}_i'^3$. Nun orientieren wir $\overline{Z}'^{*3} + H_1'^{*3} + \cdots + H_h'^3$ so, wie es ω'^* entspricht, jedoch die $Z_i'^3$ so, wie es der durch α_i übertragenen Orientierung ω^* entspricht. Kehrt sich diese Orientierung in einer 2-Sphäre $S_i'^2$ um, so beseitigen wir diese Umkehrung durch Verlagerung von $H_1'^{*3}$, usw., bis wir in M'^3 ein Sphärensystem $P_1'^{**2}, Q_1'^{**2}, P_2'^2, Q_2'^2, \ldots, S_q'^2$ (z-Komponenten des Außenraumes $Z'^{**3}, H_1'^{**3}$, usw.) und eine Orientierung ω'^{**} erhalten, die sich nur in $P_1'^{**2}$ umkehrt und für alle $Z_j'^3$ mit der durch α_j übertragenen Orientierung ω^* übereinstimmt. Nun wählen wir semilineare Abbildungen $\beta_1, \ldots, \beta_h$ von $\overline{H}_1^{*3}$ auf $\overline{H}_1'^{**3}, \ldots, \overline{H}_h^3$ auf $\overline{H}_h'^3$, die ω^* in ω'^{**} überführen, und eine semilineare Abbildung α von $\overline{Z}^{*3}$ auf $\overline{Z}'^{**3}$, die ω^* in ω'^{**} überträgt und für die 2-Sphären $P_1^{*2}, \ldots, S_q^2$ mit $\beta_1, \ldots, \alpha_q$ übereinstimmt. Dann bilden $\alpha, \alpha_1, \ldots, \beta_h$ zusammen eine semilineare Abbildung von M^3 auf M'^3, womit Eindeutigkeitssatz 2 auch für den letzten Fall bewiesen ist.

§ 4. Reduktion der 3-dimensionalen Kreuzhauben und Henkel

In [5] wurde ausgeführt, daß jede Normalfläche umkehrbar eindeutig einer verträglichen nicht-negativ-ganzzahligen Lösung der P-Gleichungen entspricht; und zwar entspricht eine zusammenhängende Normalfläche M^2 entweder einer der endlich vielen nicht-negativ-ganzzahligen Fundamentallösungen der P-Gleichungen, oder es gibt ein reduziertes, M^2 erzeugendes Normalflächenpaar (M_1^2, M_2^2). Die Normalflächen M_1^2 und M_2^2 durchdringen einander und bilden zusammen eine S-Normalfläche. Längs jeder Durchdringungslinie gibt es eine eindeutig bestimmte Umschaltung, die als regulär bezeichnet wird, so daß durch Ausführung aller dieser Umschaltungen eine zu M^2 ähnliche Normalfläche entsteht. Wird eine beliebige Teilmenge der regulären Umschaltungen durchgeführt, so entsteht eine S-Normalfläche, die (nach Definition des reduzierten Normalflächenpaares) in jedem Falle S-zusammenhängend ist. Über die mögliche Lage der Durchdringungslinien in M_1^2 und M_2^2 gelten einige allgemeine Sätze, die für die Anwendungen sehr wichtig sind. In [5] wurde bereits gezeigt: Es gibt keine Durchdringungslinie, die M_1^2 und M_2^2 in je zwei z-Komponenten zerlegt. Hier beweisen wir nun einen weiteren Satz dieser Art, der das Nicht-Vorhandensein gewissen Tripel von Durchdringungslinien zum Inhalt hat und besonders für den Fall von Bedeutung ist, daß eine der Flächen M_1^2, M_2^2 ein Schlauch, d.h. ein Torus oder ein Kleinscher Schlauch ist.

SATZ 4. *Ist (M_1^2, M_2^2) ein reduziertes Normalflächenpaar, so gibt es keine drei Durchdringungslinien D_1^1, D_2^1, D_3^1 von $M_1^2 + M_2^2$ mit folgenden Eigenschaften:*

a) *Jede der Durchdringungslinien D_1^1, D_2^1, D_3^1 liegt im Rande zweier z-Komponenten von $M_1^2 - (D_1^1 + D_2^1 + D_3^1)$ und im Rande zweier z-Komponenten von $M_2^2 - (D_1^1 + D_2^1 + D_3^1)$.*

b) *Jede der z-Komponenten von $M_1^2 - (D_1^1 + D_2^1 + D_3^1)$ und von $M_2^2 - (D_1^1 + D_2^1 + D_3^1)$ enthält höchstens zwei Durchdringungslinien im Rande.*

BEWEIS. Aus der Annahme, es gäbe drei Durchdringungslinien D_1^1, D_2^1, D_3^1 mit den genannten Eigenschaften, folgt:

$M_i^2 - (D_1^1 + D_2^1 + D_3^1)$ besteht aus drei oder aus vier z-Komponenten (für $i = 1, 2$). Denn wegen der Eigenschaft a) sind mindestens zwei z-Komponenten vorhanden, und die Annahme, es seien genau zwei z-Komponenten vorhanden, widerspricht der Eigenschaft b); also gibt es mindestens drei z-Komponenten; andererseits gibt es höchstens vier z-Komponenten, da M_i^2 n.V. zusammenhängend ist. Sind vier z-Komponenten vorhanden, so wird M_i^2 durch jede einzelne der Durchdringungslinien bereits in zwei z-Komponenten zerlegt; da es aber (nach [5], Kap. V.1) keine Durchdringungslinie gibt, die sowohl M_1^2 als auch M_2^2 in je zwei z-Komponenten zerlegt, treten also nicht für $i = 1$ und $i = 2$ je vier z-Komponenten auf; d.h. bei geeigneter Numerierung besteht $M_1^2 - (D_1^1 + D_2^1 + D_3^1)$ aus genau drei z-Komponenten. Diese z-Komponenten können wir mit K_1^2, K_2^2 und K_3^2 bezeichnen, so daß D_1^1 in K_1^2 und K_3^2 liegt, D_2^1 in K_1^2 und K_2^2, D_3^1 in K_2^2 und K_3^2, s. Fig. 7. $M_2^2 - (D_1^1 + D_2^1 + D_3^1)$ besteht aus drei oder vier z-Komponenten; in jedem Falle gibt es (mindestens) zwei

unter ihnen — sie mögen mit Z_1^2 und Z_2^2 bezeichnet werden —, die von je zwei Durchdringungslinien berandet werden. Genau eine der Durchdringungslinien liegt in $\dot{Z}_1^2$ und in $\dot{Z}_2^2$; durch geeignete Numerierung kann erreicht werden, daß diese D_2^1 ist, daß ferner die von D_2^1 verschiedene, in $\dot{Z}_1^2$ liegende Durchdringungslinie D_1^1 ist und entsprechend die in $\dot{Z}_2^2$ liegende D_3^1.

Nun seien U_1^3, U_2^3 und U_3^3 kleine Umgebungen von D_1^1, D_2^1 bzw. D_3^1 in M^3. Die Durchschnitte einer solchen Umgebung mit M_1^2 und M_2^2 können keine Möbiusschen Bänder sein (da die Durchdringungslinien n.V. im Rande je zweier z-Komponenten liegen). Also besteht $\dot{U}_j^3 - (M_1^2 + M_2^2 + \dot{M}^3)$ ($j = 1, 2$ und 3) aus vier z-Komponenten $X_j^2, Y_j^2, V_j^2, W_j^2$, so daß folgendes gilt: (s. Fig. 7) $\overline{V}^2$ ist mit $\overline{W}_j^2$ punktfremd, $\overline{X}_j^2$ mit $\overline{Y}_j^2$; Γ_1^2 verbindet K_3^2 und Z_1^2 mit-

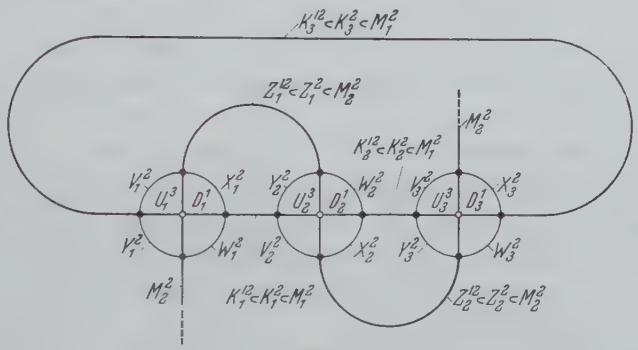


Fig. 7

einander, V_2^2 verbindet K_1^2 mit Z_2^2, V_3^2 K_2^2 mit $M_2^2 - Z_2^2$, X_1^2 K_1^2 mit Z_1^2, X_2^2 K_2^2 mit Z_2^2, X_3^2 K_3^2 mit $M_2^2 - Z_2^2$. Die Ersetzung von $(M_1^2 + M_2^2)\, U_j^3$ ($j = 1, 2, 3$) durch $\overline{V}_j^2 + \overline{W}_j^2$ ist eine Umschaltung, die wir mit σ_j bezeichnen; die entgegengesetzte Umschaltung bezeichnen wir mit $\bar{\sigma}_j$. Ferner bezeichnen wir die außerhalb von U_1^2, U_2^2 und U_3^2 liegenden Teile von K_j^2 und Z_i^2 mit $K_j'^2$ bzw. $Z_i'^2$.

Jeweils genau eine der Umschaltungen $\sigma_j, \bar{\sigma}_j$ ist regulär bezüglich $M_1^2 + M_2^2$ (s. [5], Hauptsatz 4). Hierbei gibt es acht mögliche Fälle:

a.a.a. $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sind regulär,
a.a.b. $\sigma_1, \sigma_2, \bar{\sigma}_3$ sind regulär,
. . . . . .
b.b.b. $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3$ sind regulär.

In allen acht Fällen folgt nun ein Widerspruch zu der Voraussetzung, daß (M_1^2, M_2^2) ein reduziertes Normalflächenpaar sei (vgl. Fig. 7):

a.a.a. und a.a.b: $K_3'^2 + \overline{V}_1^2 + Z_1'^2 + \overline{W}_2^2 + K_2'^2 + M_1^2 U_3^3$ ist eine Sz-Komponente von $\sigma_1 \sigma_2 (M_1^2 + M_2^2)$, also ist $\sigma_1 \sigma_2 (M_1^2 + M_2^2)$ nicht S-zusammenhängend; dieses bedeutet in den Fällen a.a.a und a.a.b einen Widerspruch zur Voraussetzung.

a.b.a: $K_3'^2 + \overline{V}_1^2 + Z_1'^2 + M_2^2 U_2^3 + Z_2'^2 + \overline{W}_3^2$ ist eine Sz-Komponente von $\sigma_1 \sigma_3 (M_1^2 + M_2^2)$.

a.b.b und b.b.b: $K_2'^2 + \overline{X}_2^2 + Z_2'^2 + \overline{Y}_3^2$ ist Sz-Komponente von $\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3(M_1^2+M_2^2)$.

b.a.a: $K_3'^2 + M_1^2 U_1^3 + K_1'^2 + \overline{Y}_2^2 + Z_2'^2 + \overline{W}_3^2$ ist Sz-Komponente von $\sigma_2\sigma_3(M_1^2+M_2^2)$.

b.a.b: $K_3'^2 + \overline{Y}_1^2 + \overline{X}_3^2 + [M_2^2 - (Z_1^2 + Z_2^2 + U_1^3 + U_3^3)]$ ist Sz-Komponente von $\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_3(M_1^2+M_2^2)$.

b.b.a: $Z_1'^2 + \overline{X}_1^2 + K_1'^2 + \overline{Y}_2^2$ ist Sz-Komponente von $\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2(M_1^2+M_2^2)$.

Also ist die Annahme, es gäbe drei Durchdringungslinien mit den genannten Eigenschaften, falsch und Satz 4 damit bewiesen.

FOLGERUNG. *(M_1^2, M_2^2) sei ein reduziertes Normalflächenpaar; dabei sei M_1^2 eine 2-Sphäre und M_2^2 ein Torus oder ein Kleinscher Schlauch. Die Anzahl der Durchdringungslinien von $M_1^2+M_2^2$ sei s (per Def. ist $s\neq 0$). $D_1^1, \ldots, D_t^1$ seien t beliebige Durchdringungslinien von $M_1^2+M_2^2$ mit $1\leqq t\leqq s$.* Dann folgt:

a) *$M_1^2 - (D_1^1+\cdots+D_t^1)$ besteht aus t offenen 2-Elementen und einer t-fach gelochten 2-Sphäre.*

b) *Ist $t>1$, so besteht $M_2^2 - (D_1^1+\cdots+D_t^1)$ aus t offenen Kreisringen.*

BEWEIS. Für $t=1$ und $t=2$ ist Behauptung a) trivial, und für $t=2$ folgt Behauptung b) daraus, daß keine der Durchdringungslinien in M_2^2 ein 2-Element berandet und keine von ihnen in M_2^2 ein Möbiussches Band als Umgebung hat. Aus der Induktionsannahme, beide Behauptungen seien für $t=u$ mit $1<u<s$ bewiesen, folgt für $t=u+1$:

Die u Durchdringungslinien $D_1^1, \ldots, D_u^1$ zerlegen M_2^2 in u offene Kreisringe; da D_{u+1}^1 in M_2^2 kein 2-Element berandet, zerlegt sie einen der Kreisringe in zwei Kreisringe, womit Behauptung b) auch für $t=u+1$ bewiesen ist.

$D_1^1, \ldots, D_u^1$ zerlegen M_1^2 in u 2-Elemente $E_1^2, \ldots, E_u^2$ und eine u-fach gelochte 2-Sphäre T^2. Dann liegt D_{u-1}^1 nicht in einem der 2-Elemente E_i^2, da anderenfalls die drei Durchdringungslinien $D_{u-1}^1, \dot{E}_i^2, \dot{E}_j^2$ ($j\neq i$ beliebig) so in M_1^2 und M_2^2 lägen, wie es nach Satz 4 unmöglich ist. D_{u-1}^1 liegt also in T^2 und zerlegt T^2 in zwei z-Komponenten T_1^2 und T_2^2. Dabei ist eine dieser z-Komponenten ein offenes 2-Element; denn läge in $\dot{T}_1^2$ eine Durchdringungslinie D_i^1 und in $\dot{T}_2^2$ eine Durchdringungslinie D_j^1 mit i, j zwischen 1 und u, so lägen D_i^1, D_j^1, D_{u+1}^1 so in M_1^2 und M_2^2, wie es nach Satz 4 unmöglich ist. Damit ist auch Behauptung a) für $t=u+1$ bewiesen.

Nach diesen Ergänzungen zur allgemeinen Theorie der Normalflächen können wir nun die Bestimmungsverfahren für die Kreuzhauben und Henkel von M^3 herleiten.

SATZ 5. *M^3 sei eine beliebige (zusammenhängende, berandete oder unberandete) 3-Mannigfaltigkeit. Θ sei eine Normalzerlegung bezüglich einer beliebigen randtreuen Zerlegung Γ von M^3 in offene Raumelemente. Dann gilt: Gibt es in M^3 eine (singularitätenfreie) einseitig in M^3 liegende projektive Ebene, so sind die Repräsentanten mindestens einer der Fundamentalklassen bezüglich Θ ebenfalls einseitig in M^3 liegende projektive Ebenen.*

Beweis. 1. Gibt es in M^3 eine einseitige projektive Ebene, so läßt sich diese (nach [5], Hauptsatz 1) durch ξ-Operationen in eine Normalfläche bezüglich Θ überführen. Daraus folgt nach Satz 2 b), daß es eine Normalfläche M^2 gibt, die ebenfalls eine einseitige projektive Ebene ist. Ihre F-Zahl sei f.

2. Liegt M^2 bereits in einer der Fundamentalklassen, so ist nichts mehr zu beweisen. Liegt M^2 in keiner der Fundamentalklassen, so gibt es nach [5], Satz 7 ein reduziertes, M^2 erzeugendes Normalflächenpaar (M_1^2, M_2^2). Die Durchdringungslinien von $M_1^2+M_2^2$ seien $D_1^1, \ldots, D_s^1$; $U_1^3, \ldots, U_s^3$ seien im Verhältnis zu $\Theta|M_1^2+M_2^2$ kleine Umgebungen von $D_1^1, \ldots, D_s^1$ in M^3. Die (nach [5], Hauptsatz 4) eindeutig bestimmten, bezüglich $M_1^2+M_2^2$ regulären Umschaltungen von $(M_1^2+M_2^2)\,U_i^3$ über U_i^3 $(i=1, \ldots, s)$ bezeichnen wir mit σ_i. Nun besteht der wesentliche Teil des Beweises darin, folgendes zu zeigen: Es gibt eine irregulär (bezüglich $U_1^3, \ldots, U_s^3$) aus $M_1^2+M_2^2$ abgeleitete, einseitig in M^3 liegende projektive Ebene M'^2.

Beweis. 2.1. Da die Summe der Charakteristiken von M_1^2 und M_2^2 gleich -1 ist, liegt bei geeigneter Numerierung einer der folgenden Fälle vor:

a) M_1^2 ist eine projektive Ebene, M_2^2 ein Torus oder ein Kleinscher Schlauch.

b) M_1^2 ist eine 2-Sphäre mit drei Kreuzhauben, M_2^2 eine 2-Sphäre.

2.2. Im Falle a) liegt M_1^2 einseitig in M^3, ist also eine irregulär aus $M_1^2+M_2^2$ abgeleitete projektive Ebene mit den geforderten Eigenschaften.

Beweis. Wir unterscheiden die Fälle:

a 1. Alle Durchschnitte $M_1^2\,U_1^3, \ldots, M_1^2\,U_s^3$ sind Kreisringe.

a 2. Es gibt ein j zwischen 1 und s, so daß $M_1^2\,U_j^3$ ein Möbiussches Band ist.

Im Falle a 1 enthält $M_1^2-(U_1^3+\cdots+U_s^3)$ eine z-Komponente P^2, die eine gelochte projektive Ebene ist. P^2 liegt in der zu M^2 ähnlichen, also einseitig in M^3 liegenden, projektiven Ebene $\sigma_s \ldots \sigma_1(M_1^2+M_2^2)$. Da die z-Komponenten von $\sigma_s \ldots \sigma_1(M_1^2+M_2^2)-P^2$ 2-Elemente sind, also zweiseitig in M^3 liegen, folgt daraus, daß P^2 einseitig in M^3 liegt. Also liegt auch M_1^2 einseitig in M^3, w.z.b.w.

Im Falle a 2 ist $M_2^2\,U_j^3$ ebenfalls ein Möbiussches Band (s. [5]), also liegt $M_1^2\,U_j^3$ einseitig in M^3, also auch M_1^2 selbst, w.z.b.w.

2.3. Im Falle b) sind alle Durchschnitte $M_1^2\,U_1^3, \ldots, M_1^2\,U_s^3$ Kreisringe, und keine der Durchdringungslinien zerlegt M_1^2 in zwei z-Komponenten. Also besteht $M_1^2-(U_1^3+\cdots+U_s^3)$ aus einer zweifach gelochten projektiven Ebene P^2 und $s-1$ Kreisringen. (Diese Folgerung ergibt sich leicht durch Betrachtung der Charakteristiken: Alle z-Komponenten sind mindestens zweifach gelocht, haben also nicht-negative Charakteristiken; also kommt genau eine z-Komponente mit der Charakteristik $+1$ vor und außer dieser nur Kreisringe.) Dabei liegt P^2 einseitig in M^3, da P^2 in der zu M^2 ähnlichen, einseitigen projektiven Ebene $\sigma_s \ldots \sigma_1(M_1^2+M_2^2)$ liegt. Nun unterscheiden wir die Fälle $s=1$ und $s>1$.

Im Falle $s=1$ gilt: $M_2^2-U_1^3$ besteht aus zwei 2-Elementen E_1^2, E_2^2. $U_1^3-(M_1^2+M_2^2)$ besteht aus vier Kreisringen V^2, W^2, X^2, Y^2, so daß $\overline{W}^2$ mit

$\overline{V}^2$ punktfremd ist und $\overline{Y}^2$ mit $\overline{X}^2$. Bei geeigneter Bezeichnung sind $\overline{V}^2$ und $\overline{X}^2$ mit $\overline{E}_2^2$ punktfremd, entsprechend $\overline{W}^2$ und $\overline{Y}^2$ mit $\overline{E}_1^2$ (s. Fig. 8), und die Umschaltung σ_1 besteht in der Ersetzung von $(M_1^2+M_2^2)\,U_1^3$ durch $\overline{V}^2+\overline{W}^2$. Nun ist auch $\bar{\sigma}_1(M_1^2+M_2^2)=P^2+\overline{X}^2+E_1^2+\overline{Y}^2+E_2^2$ eine einseitige projektive Ebene; sie ist irregulär aus $M_1^2+M_2^2$ abgeleitet, womit die Behauptung für $s=1$ bewiesen ist.

Im Falle $s>1$ gilt: Die beiden Randlinien L_1^1 und L_2^1 von P^2 liegen im Rande zweier Umgebungen $U_{j_1}^3$ bzw. $U_{j_2}^3$ ($j_1, j_2=1, \ldots, s$; $j_1 \neq j_2$). Dabei besteht $M_2^2-(U_{j_1}^3+U_{j_2}^3)$ aus zwei 2-Elementen E_1^2, E_2^2 und einem Kreisring K^2 (s. Fig. 9). $\dot{U}_{jl}^3-(M_1^2+M_2^2)$ $(l=1, 2)$ besteht aus vier Kreisringen, deren einer

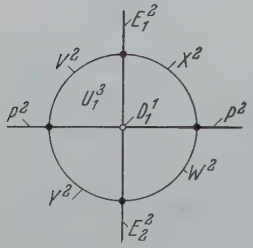


Fig. 8

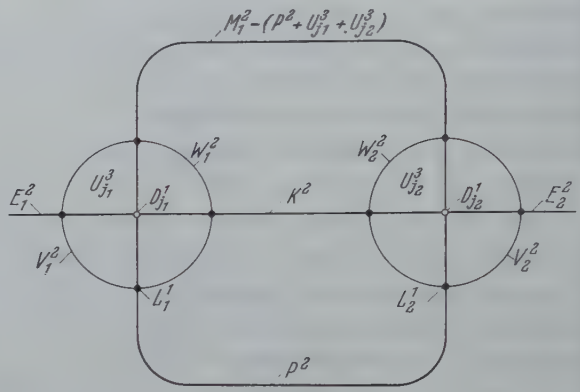


Fig. 9

— er werde mit V_l^2 bezeichnet — von L_l^1 und $\dot{E}_l^2$ berandet wird; der Kreisring, dessen abgeschlossene Hülle mit $\overline{V}_l^2$ punktfremd ist, wird mit $\overline{W}_l^2$ bezeichnet. Wir bezeichnen diejenige Umschaltung von $(M_1^2+M_2^2)\,U_l^3$ über $\dot{U}_l^3$, bei der $(M_1^2+M_2^2)\,U_l^3$ durch $\overline{V}_l^2+\overline{W}_l^2$ ersetzt wird, mit σ_l^*. Nun ist $P^2+\overline{V}_1^2+\overline{V}_2^2+E_1^2+E_2^2$ eine Sz-Komponente von $\sigma_2^*\sigma_1^*(M_1^2+M_2^2)$ und eine einseitige projektive Ebene. Diese projektive Ebene ist von $\sigma_s \ldots \sigma_1(M_1^2+M_2^2)$ verschieden, (da sie z. B. K^2 nicht enthält); also ist sie irregulär aus $M_1^2+M_2^2$ abgeleitet, womit die Behauptung für $s>1$ bewiesen ist.

Mit 2.1, 2.2 und 2.3 ist Nr. 2 bewiesen.

3. M'^2 ist eine Halbnormalfläche, und es ist entweder die F-Zahl f' von M'^2 kleiner als f, oder es ist $f'=f$ und M'^2 enthält eine Falte (s. [5], Beweis von Satz 8, Nr. 1). Daraus folgt nach [5], Hauptsatz 1 und nach Satz 2 b), daß es eine Normalfläche M^{*2} gibt, die ebenfalls eine einseitige projektive Ebene ist, und deren F-Zahl f^* kleiner als f ist.

4. Liegt M^{*2} in keiner der Fundamentalklassen, so läßt sich wieder, wie unter Nr. 2 und 3 ausgeführt, auf eine einseitige projektive Ebene M^{**2} schließen, die eine Normalfläche mit F-Zahl $f^{**}<f^*$ ist. So fortfahrend, kommen wir nach weniger als f Schritten zu einer einseitigen projektiven Ebene, die in einer der Fundamentalklassen liegt. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Satz 6. *M^3 sei eine kreuzhaubenfreie*[11]*, im übrigen beliebige (zusammenhängende, berandete oder unberandete) 3-Mannigfaltigkeit. Θ sei eine Normalzerlegung bezüglich einer beliebigen randtreuen Zerlegung Γ von M^3 in offene Raumelemente. Dann gilt: Gibt es in M^3 eine nichtzerlegende 2-Sphäre, so sind die Repräsentanten mindestens einer der Fundamentalklassen bezüglich Θ ebenfalls nichtzerlegende 2-Sphären in M^3.*

Beweis. 1. Gibt es in M^3 eine nichtzerlegende 2-Sphäre, so folgt nach [5], Hauptsatz 1 und nach Satz 2 c), daß es eine nichtzerlegende 2-Sphäre S^2 gibt, die eine Normalfläche bezüglich Θ ist. Die F-Zahl von S^2 sei f.

2. Liegt S^2 in keiner der Fundamentalklassen, so gibt es nach [5], Satz 7 ein reduziertes, S^2 erzeugendes Normalflächenpaar (M_1^2, M_2^2). Die Durchdringungslinien von $M_1^2 - M_2^2$ seien $D_1^1, \ldots, D_s^1$; $U_1^3, \ldots, U_s^3$ seien kleine Umgebungen von $D_1^1, \ldots, D_s^1$ in M^3; $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ seien die entsprechenden, bezüglich $M_1^2 + M_2^2$ regulären Umschaltungen. Dann gibt es eine irregulär aus $M_1^2 + M_2^2$ abgeleitete, nichtzerlegende 2-Sphäre S'^2.

Beweis. 2.1. Die Summe der Charakteristiken von M_1^2 und von M_2^2 ist -2; also ist bei geeigneter Numerierung M_1^2 eine 2-Sphäre, M_2^2 ein Torus oder ein Kleinscher Schlauch. Denn daß M_1^2 und M_2^2 projektive Ebenen sind und damit n.V. zweiseitig in M^3 liegen, ist unmöglich, da dann jede Durchdringungslinie D_i^1 sowohl M_1^2 als auch M_2^2 in je zwei z-Komponenten zerlegen würde, (da $U_i^3 M_j^2$ kein zweiseitiges Möbiussches Band sein kann, also ein Kreisring ist).

2.2. Liegt M_1^2 nichtzerlegend in M^3, so besitzt M_1^2 die für S'^2 geforderten Eigenschaften. Wir haben daher nur noch den Fall zu behandeln, daß M_1^2 zerlegend in M^3 liegt. In diesem Falle gilt weiter:

2.3. Nach der Folgerung aus Satz 4 besteht $M_2^2 - (U_1^3 + \cdots + U_s^3)$ aus s offenen Kreisringen $K_1^2, \ldots, K_s^2$; da $M^3 - M_1^2$ aus zwei z-Komponenten besteht, ist s eine gerade Zahl. Bei geeigneter Numerierung liegt eine Randlinie von K_i^2 in $\dot{U}_{i-1}^3$, die andere in $\dot{U}_i^3$ (Indices modulo s). Ferner besteht $M_1^2 - (U_1^3 + \cdots + U_s^3)$ aus s offenen 2-Elementen $E_1^2, \ldots, E_s^2$ und einer s-fach gelochten 2-Sphäre A^2; bei geeigneter Numerierung liegt $\dot{E}_i^2$ in $\dot{U}_i^3$ (s. Fig. 10). $\dot{U}_i^3 - (M_1^2 + M_2^2)$ besteht aus vier offenen Kreisringen $V_i^2, W_i^2, X_i^2, Y_i^2$; dabei kann die Bezeichnung so gewählt werden, daß $\overline{W}_i^2$ mit $\overline{V}_i^2$ punktfremd ist und entsprechend $\overline{Y}_i^2$ mit $\overline{X}_i^2$, daß $\dot{E}_i^2$ in $\dot{W}_i^2$ und in $\dot{X}_i^2$ liegt und daß die Umschaltung σ_i in der Ersetzung von $(M_1^2 + M_2^2) U_i^3$ durch $\overline{V}_i^2 + \overline{W}_i^2$ besteht. Dann liegt genau eine Randlinie von V_i^2 in $\dot{A}^2$. Durch geeignete Wahl des Numerierungssinnes i kann erreicht werden, daß die nicht in $\dot{A}^2$ liegende Randlinie von V_1^2 in $\dot{K}_1^2$ liegt und entsprechend die von $\dot{E}_1^2$ verschiedene Randlinie von W_1^2 in $\dot{K}_2^2$. Dann folgt durch Induktion, daß für alle i die nicht in $\dot{A}^2$ liegende Randlinie von V_i^2 in $\dot{K}_i^2$ liegt und die von $\dot{E}_i^2$ verschiedene Randlinie von W_i^2

[11] Die Voraussetzung der Kreuzhaubenfreiheit ist, wie H. Schubert bemerkt hat, leicht zu vermeiden.

in $\dot{K}^2_{i+1}$. Denn anderenfalls wäre $E^2_{j-1}+\overline{W}^2_{j-1}+K^2_j+\overline{W}^2_j+E^2_j$ eine z-Komponente von $\sigma_s \dots \sigma_1(M^2_1+M^2_2)$, wenn j die kleinste Zahl ist, für die nicht V^2_j, sondern W^2_j eine Randlinie aus $\dot{K}^2_j$ enthält; also wäre $\sigma_s \dots \sigma_1(M^2_1+M^2_2)$ nicht zusammenhängend.

2.4. Es gibt einen Index j zwischen 1 und s, so daß die 2-Sphäre $S'^2 = E^2_{j-1}+\overline{W}^2_{j-1}+K^2_j+\overline{X}^2_j+E^2_j$ nichtzerlegend in M^3 liegt (vgl. Fig. 10).

BEWEIS. Aus der Annahme des Gegenteils folgt: Für alle $i=1, \dots, s$ besteht $M^3-(E^2_{i-1}+\overline{W}^2_{i-1}+K^2_i+\overline{X}^2_i+E^2_i)$ aus zwei z-Komponenten, deren eine — sie werde mit T^3_i bezeichnet — die gelochte 2-Sphäre A^2 nicht enthält.

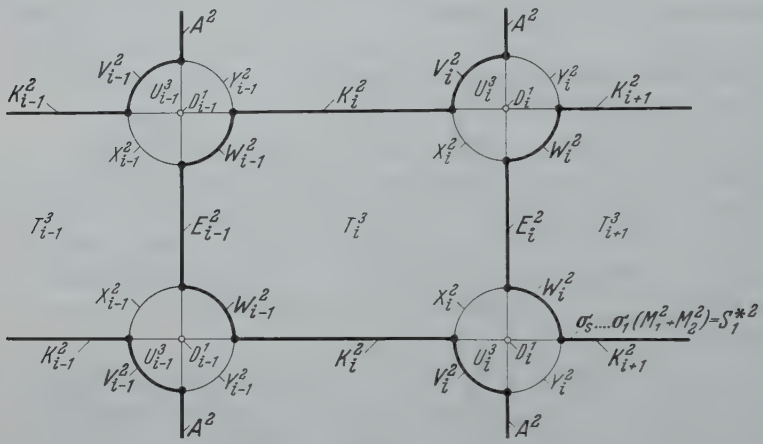


Fig. 10

$T^3_1+\dots+T^3_s+U^3_1+\dots+U^3_s$ ist eine 3-Mannigfaltigkeit M'^3. Dabei ist $M^3-M'^3$ zusammenhängend (da M'^3 ein Torus bzw. Kleinscher Schlauch, also zusammenhängend, ist) und wird durch A^2 in zwei z-Komponenten Z^3_1 und Z^3_2 zerlegt. Denn wäre $M^3-(M'^3+A^2)$ zusammenhängend, so gäbe es in $M^3-(M'^3+A^2)$ einen Weg, der eine Seite von A^2 mit der anderen verbindet; dieser Weg verbände also auch in M^3 eine Seite von M^2_1 mit der anderen, ohne M^2_1 zu treffen; also wäre $M^3-M^2_1$ zusammenhängend und M^2_1 nichtzerlegend in M^3. — Bei geeigneter Numerierung von Z^3_1 und Z^3_2 liegen $K^2_1, K^2_3, \dots, K^2_{s-1}$ in $\dot{Z}^3_1$ und $K^2_2, K^2_4, \dots, K^2_s$ in $\dot{Z}^3_2$. Daraus folgt, daß $M^3-\sigma_s \dots \sigma_1(M^2_1+M^2_2)$ aus den beiden z-Komponenten $Z^3_1+\sum_{i \text{ gerade}}(\mathring{U}^3_i+X^2_i+Y^2_i+T^3_i)$ und $Z^3_2+\sum_{i \text{ ungerade}}(\mathring{U}^3_i+X^2_i+Y^3_i+T^3_i)$ besteht. Dieses steht im Widerspruch dazu, daß $\sigma_s \dots \sigma_1(M^2_1+M^2_2)$ (nach [5], Hauptsatz 4) eine zu S^2 ähnliche 2-Sphäre ist, also M^3 nicht zerlegt. Also ist die Annahme falsch, w.z.b.w.

2.5. Die 2-Sphäre S'^2 ist eine Sz-Komponente von $\sigma_{j-1}\bar{\sigma}_j(M^2_1+M^2_2)$, also irregulär aus $M^2_1+M^2_2$ abgeleitet, und besitzt damit die geforderten Eigenschaften. Damit ist der Beweis von Nr. 2 vollendet.

3. Nun läßt sich ebenso weiter schließen, wie in den Nrn. 3 und 4 des Beweises von Satz 5: Entweder ist die F-Zahl von S'^2 kleiner als f, oder sie ist gleich f und S'^2 enthält eine Falte. Daraus folgt (nach [5], Hauptsatz 1 und nach Satz 2 c), daß es eine Normalfläche S^{*2} gibt, die eine nichtzerlegende 2-Sphäre ist und eine F-Zahl kleiner als f hat. Liegt S^{*2} in keiner der Fundamentalklassen, so läßt sich wieder auf eine nichtzerlegende 2-Sphäre S^{**2} mit kleinerer F-Zahl schließen, usw., bis nach weniger als f Schritten eine nichtzerlegende 2-Sphäre erhalten wird, die in einer der Fundamentalklassen liegt. Damit ist Satz 6 bewiesen.

Satz 7. *Der projektive Raum ist irreduzibel* [12]).

Beweis. Ein projektiver Raum P^3 läßt sich zerlegen in eine projektive Ebene P^2 und ein offenes 3-Element E^3 mit Randsingularitäten. Ist S^2 eine beliebige 2-Sphäre in P^3, so läßt sich durch kleine isotope Deformationen erreichen, daß S^2 mit P^2 nur geschlossene Durchdringungslinien gemeinsam hat. Da jede dieser Durchdringungslinien ein in P^2 liegendes 2-Element berandet, läßt sich S^2 durch ϱ-Operationen in ein Sphärensystem überführen, das in E^3 liegt, also nach [1] nur kompressible 2-Sphären enthält. Daraus folgt nach Satz 2 d), daß auch S^2 kompressibel in P^3 liegt. Also ist P^3 irreduzibel, w.z.b.w.

Bestimmungsverfahren 1. *Ist M^3 eine beliebig gegebene (zusammenhängende, berandete oder unberandete) 3-Mannigfaltigkeit, so lassen sich (in einer beschränkten Anzahl von Schritten) die Kreuzhaubenzahl k und die Henkelzahl h von M^3 bestimmen und es läßt sich eine kreuzhauben-, henkel- und randsphärenfreie 3-Mannigfaltigkeit M'^3 konstruieren, die aus M^3 durch k Kreuzhaubenreduktionen, h Henkelreduktionen und Ausfüllen der Randsphären hervorgeht.*

Dieses kann folgendermaßen geschehen: Es wird eine beliebige randtreue Zerlegung Γ_1 von M^3 gewählt und eine Normalzerlegung Θ_1 bezüglich Γ_1; dann werden (nach [5], Kap. II) die Fundamentalklassen bezüglich Θ_1 durch Konstruktion je eines Repräsentanten bestimmt. Ist keiner dieser Repräsentanten eine einseitig in M^3 liegende projektive Ebene, so ist M^3 nach Satz 5 kreuzhaubenfrei (d.h. es ist $k=0$). Ist dagegen (mindestens) einer der Repräsentanten — er werde mit P_1^2 bezeichnet — eine einseitige projektive Ebene, so wird eine kleine Umgebung K_1^3 von P_1^2 gewählt und eine 3-Mannigfaltigkeit $M_2^3 = M^3 - \mathring{K}_1^3$ gebildet. M_2^3 wird dann ebenso behandelt wie M^3: Es werden Zerlegung Γ_2, Normalzerlegung Θ_2 bezüglich Γ_2 und die Fundamentalklassen bezüglich Θ_2 konstruiert; befindet sich unter den Repräsentanten dieser Fundamentalklassen eine einseitige projektive Ebene P_2^2, so werden eine kleine Umgebung K_2^3 von P_2^2 und die 3-Mannigfaltigkeit $M_3^3 = M_2^3 - \mathring{K}_2^3$ hergestellt. So fortfahrend, erhalten wir nach einer auf Grund des Endlichkeitssatzes 1 beschränkten Anzahl von Schritten eine kreuzhaubenfreie 3-Mannigfaltigkeit $M_{k+1}^3 = M_k^3 - \mathring{K}_k^3$.

[12]) Die Irreduzibilität aller Linsenräume wird in einer späteren Arbeit bewiesen werden.

Gibt es nun unter den Repräsentanten der Fundamentalklassen bezüglich Θ_{k+1} keine 2-Sphäre, die nichtzerlegend in M^3_{k+1} liegt, so ist M^3_{k+1} nach Satz 6 henkelfrei. Ist dagegen (mindestens) einer der Repräsentanten — er werde mit S^2_1 bezeichnet — eine nichtzerlegende 2-Sphäre in M^3_{k+1}, so wird eine kleine Umgebung H^3_1 von S^2_1 in M^3_{k+1} gewählt und die 3-Mannigfaltigkeit $M^3_{k+2} = M^3_{k+1} - \overset{\circ}{H}{}^3_1$ gebildet. Mit M^3_{k+2} verfahren wir ebenso weiter wie mit M^3_{k+1}, usw., und erhalten nach einer beschränkten Anzahl von Schritten eine kreuzhauben- und henkelfreie 3-Mannigfaltigkeit $M^3_{k+h+1} = M^3_{k+h} - \overset{\circ}{H}{}^3_h$. Schließlich füllen wir die Randsphären von M^3_{k+h+1} durch 3-Elemente aus und erhalten dadurch eine 3-Mannigfaltigkeit M'^3, die aus M^3 durch k Kreuzhaubenreduktionen, h Henkelreduktionen und Ausfüllen der Randsphären hervorgeht; sie ist kreuzhauben-, henkel- und randsphärenfrei.

k und h sind die Kreuzhauben- bzw. Henkelzahl von M^3. Denn in M^3_{k+h+1} existiert nach der Folgerung aus Endlichkeitssatz 1 ein vollständiges Sphärensystem $T^2_1, \ldots, T^2_m$; es zerlegt M^3_{k+h-1} in $m+1$ z-Komponenten, wobei sich keine von diesen durch 3-Elemente zu einem projektiven Raum ergänzen läßt; $T^2_1, \ldots, T^2_m, \dot{K}^3_1, \ldots, \dot{K}^3_k, \dot{H}^3_1, \ldots, \dot{H}^3_h$ bilden ein vollständiges Sphärensystem in M^3 (da sich die H^3_i durch 3-Elemente zu 3-Sphären ergänzen lassen und die K^3_j zu projektiven Räumen, die nach Satz 7 irreduzibel sind); also besitzt die Äquivalenzklasse $\mathfrak{M}^3$ von M^3 nach Eindeutigkeitssatz 1 h Henkel und k mal den projektiven Raum als irreduzible Erzeugende.

Damit sind die Zahlen k und h und die 3-Mannigfaltigkeit M'^3 erhalten.

FOLGERUNG. *Das in* [5], *Kap.* V.4 *angegebene Bestimmungsverfahren für Bänder minimaler Charakteristik mit vorgegebener Randlinie und das Kreislinienkriterium* ([5], *Kap.* V.5) *lassen sich für beliebige* 3-*Mannigfaltigkeiten verallgemeinern:*

Ist M^3 eine beliebige (zusammenhängende, berandete oder unberandete) 3-Mannigfaltigkeit, in deren Rand eine 1-Sphäre Y^1 vorgegeben ist, so können wir M^3 nach dem eben dargestellten Bestimmungsverfahren durch Kreuzhauben- und Henkelreduktionen in eine kreuzhauben- und henkelfreie 3-Mannigfaltigkeit M'^3 überführen. Dann läßt sich in M'^3 nach dem Bestimmungsverfahren [5], Kap. V.4 ein in Y^1 eingespanntes Band minimaler Charakteristik konstruieren (sofern es überhaupt in Y^1 eingespannte Bänder in M'^3 gibt); es läßt sich in M'^3 so isotop deformieren, daß es die Ränder der reduzierten Henkel und Kreuzhauben nicht trifft, also auch in M^3 liegt. Dieses Band ist auch von minimaler Charakteristik in M^3. Denn jedes in M^3 liegende (in Y^1 eingespannte) Band läßt sich durch ϱ-Operationen so abändern, daß ein Band von nicht größerer Charakteristik entsteht, das die Ränder der Kreuzhauben und Henkel nicht trifft, also auch in M'^3 liegt.

Ist in M^3 eine Knotenlinie (1-Sphäre) K^1 vorgegeben, so kann man ebenso vorgehen, wie beim Kreislinienkriterium [5], Kap. V.5 beschrieben, und hat dabei lediglich statt des in [5], Kap. V.4 dargestellten Bestimmungsverfahrens das oben angegebene verallgemeinerte Bestimmungsverfahren anzuwenden.

§ 5. Bestimmung eines vollständigen Sphärensystems

Sind an einer gegebenen 3-Mannigfaltigkeit M^3 alle Kreuzhauben und Henkel reduziert worden, so kommt es nun darauf an, ein vollständiges System von 2-Sphären zu bestimmen, um M^3 in irreduzible Erzeugende aufzuspalten. Da wir kein Äquivalenzkriterium für die 3-Sphäre besitzen, können wir diese Aufspaltung, im Gegensatz zur Reduktion der Kreuzhauben und Henkel, nicht successive in endlich vielen Schritten durchführen, sondern müssen uns mit *einem* Schritt ein vollständiges Sphärensystem verschaffen. Hierdurch werden die Untersuchungen komplizierter als in §4, weil Normalflächen behandelt werden müssen, die nicht zusammenhängend sind.

Hilfssatz 2. *M^3 sei eine kreuzhauben-, henkel- und randsphärenfreie, sonst beliebige (zusammenhängende, berandete oder unberandete) 3-Mannigfaltigkeit. Θ sei eine Normalzerlegung bezüglich einer beliebigen randtreuen Zerlegung Γ von M^3 in offene Raumelemente. Weiter sei in M^3 ein vollständiges Sphärensystem $S_1^2, \ldots, S_m^2$ gegeben. Dabei seien $S_1^2, \ldots, S_m^2$ Normalflächen bezüglich Θ mit den P-Zahlenvektoren $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m$. Dann folgt:*

Sind nicht alle Vektoren $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m$ Fundamentallösungen der P-Gleichungen so existiert in M^3 ein vollständiges Sphärensystem $S_1'^2, \ldots, S_{m'}'^2$, so daß $S_1'^2, \ldots, S_{m'}'^2$ ebenfalls Normalflächen sind und die F-Zahl f' von $S_1'^2 + \cdots + S_{m'}'^2$ kleiner ist als die F-Zahl f von $S_1^2 + \cdots + S_m^2$.

Beweis. Wir können voraussetzen, daß $\mathfrak{x}_1$ keine Fundamentallösung sei.

1. Zunächst ergibt sich ebenso, wie beim Beweis von Satz 6, Nr. 2, 2.1 und 2.3 (s. Fig. 10): Es gibt ein reduziertes, S_1^2 erzeugendes Normalflächenpaar (M_1^2, M_2^2). Die Durchdringungslinien von $M_1^2 + M_2^2$ seien $D_1^1, \ldots, D_s^1$; $U_1^3, \ldots, U_s^3$ seien (im Verhältnis zu $M_1^2 + M_2^2 | \Theta$ kleine) Umgebungen von $D_1^1, \ldots, D_s^1$ in M^3; $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ seien die entsprechenden regulären Umschaltungen. Bei geeigneter Numerierung ist M_1^2 eine 2-Sphäre und M_2^2 ein Torus oder ein Kleinscher Schlauch; M_1^2 liegt n.V. zerlegend in M^3; s ist daher eine gerade Zahl. Für die z-Komponenten von $M_1^2 - (U_1^3 + \cdots + U_s^3)$, $M_2^2 - (U_1^3 + \cdots + U_s^3)$ und $\dot{U}_i^3 - (M_1^2 + M_2^2)$ führen wir dieselben Bezeichnungen ein, wie beim Beweis von Satz 6 (s. Fig. 10). Die 2-Sphäre $E_{i-1}^2 + \overline{W}_{i-1}^2 + K_i^2 + \overline{X}_i^2 + E_i^2$ zerlegt M^3 n.V. in zwei z-Komponenten, deren eine — sie werde mit T_i^3 bezeichnet — mit A^2 punktfremd ist. Die zu S_1^2 ähnliche 2-Sphäre $\sigma_s \ldots \sigma_1 (M_1^2 + M_2^2)$ bezeichnen wir zur Abkürzung mit S_1^{*2}.

2. Nun existieren in M^3 mit S_1^{*2} punktfremde 2-Sphären $S_2^{*2}, \ldots, S_{m^*}^{*2}$, so daß folgendes gilt:

a) $S_1^{*2} + \cdots + S_{m^*}^{*2}$ ist ein vollständiges Sphärensystem in M^3.

b) $S_2^{*2} + \cdots + S_{m^*}^{*2}$ ist eine Halbnormalfläche bezüglich Θ, deren F-Zahl nicht größer ist als die von $S_2^2 + \cdots + S_m^2$.

c) Der Durchschnitt $(S_2^{*2} + \cdots + S_{m^*}^{*2}) U_i^3$ ist entweder leer, oder besteht aus Kreisringen $R_{i1}^2, \ldots, R_{it_i}^2$, deren Inneres in $\mathring{U}_i^3$ liegt, und deren jeder eine

in X_i^2 und eine in Y_i^2 liegende Randlinie hat, so daß diese Randlinien X_i^2 und Y_i^2 in (offene) Kreisringe zerlegen (für alle $i=1, \ldots, s$).

BEWEIS. Zunächst gibt es ein zu $S_2^2+\cdots+S_m^2$ bezüglich Θ ähnliches System von 2-Sphären $S_{(1)2}^2, \ldots, S_{(1)m}^2$, das mit S_1^{*2} punktfremd ist. (Ein solches Sphärensystem entsteht z. B. als Bild von $S_2^2+\cdots+S_m^2$ bei einer semilinearen Abbildung von M^3 auf sich selbst, die S_1^2 in S_1^{*2} überführt und die Elemente von Θ jeweils in sich selbst abbildet.) $S_{(1)2}^2, \ldots, S_{(1)m}^2$ lassen sich durch kleine isotope Deformationen in bezüglich Θ ähnliche 2-Sphären $S_{(2)2}^2, \ldots, S_{(2)m}^2$ überführen, die mit den Kreisringen X_i^2 höchstens Durchdringungslinien gemeinsam haben. Befinden sich unter diesen Durchdringungslinien solche, die in den X_i^2 liegende 2-Elemente beranden, so lassen sich die Durchdringungslinien dieser Art successive durch ϱ-Operationen beseitigen, deren Kerne im Verhältnis zu Θ kleine Umgebungen von 2-Elementen aus den X_i^2 sind, so daß die F-Zahl des Sphärensystems nicht verändert wird und die Halbnormalflächeneigenschaft erhalten bleibt. Die so erhaltenen 2-Sphären $S_{(3)2}^2, \ldots, S_{(3)m^*}^2$ haben mit den X_i^2 höchstens solche Durchdringungslinien gemeinsam, die die X_i^2 in Kreisringe zerlegen, und bilden nach Satz 3 zusammen mit S_1^{*2} ein vollständiges Sphärensystem in M^3. Nun sei in jeder der Umgebungen U_i^2 ein (im Verhältnis zu $S_{(3)2}^2+\cdots+S_{(3)m^*}^2|\Theta$) nahe zu $V_i^2+\bar{X}_i^2+W_i^2$ benachbarter Kreisring Y_i^{*2} ausgezeichnet (s. Fig. 11 und Fig. 10); der von $Y_i^{*2}+V_i^2+\bar{X}_i^2+W_i^2$ berandete, in U_i^3 liegende Vollring werde mit U_i^{*3} bezeichnet. Die 2-Sphären $S_{(3)2}^2, \ldots, S_{(3)m^*}^2$ schneiden U_i^{*3} in Kreisringen $R_{i1}^{*2}, \ldots, R_{it_i}^{*2}$ ($t_i=0, 1, 2, \ldots$), deren Inneres in U_i^{*3} liegt, und deren jeder eine in X_i^2 und eine in Y_i^{*2} liegende Randlinie besitzt. Nun gibt es eine semilineare Abbildung ζ von M^3 auf sich selbst, durch die U_i^{*3} in U_i^3 (für alle $i=1, \ldots, s$) übergeht, so daß V_i^2, W_i^2 und X_i^2 in sich selbst abgebildet werden und Y_i^{*2} in Y_i^2 übergeht. Die Abbildung ζ kann ferner so gewählt werden, daß S_1^{*2} fest bleibt und die einzelnen Elemente von Θ jeweils in sich selbst abgebildet werden. Durch ζ geht $S_{(3)2}^2+\cdots+S_{(3)m^*}^2$ in ein Sphärensystem $S_2^{*2}+\cdots+S_{m^*}^{*2}$ über, das die geforderten Eigenschaften hat. Damit ist Nr. 2 bewiesen.

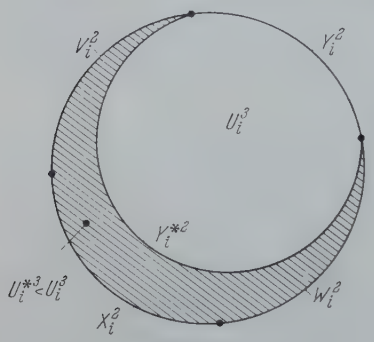


Fig. 11

3. Die Anzahl der Kreisringe R_{ij}^2 bezeichnen wir mit $r\left(=\sum_{i=1}^{s} t_i\right)$ und nennen sie kurz die *R-Zahl* des Sphärensystems $S_1^{*2}+\cdots+S_{m^*}^{*2}$. Wir wollen nun beweisen, daß sich aus $S_1^{*2}+\cdots+S_{m^*}^{*2}$ ein neues, ebenfalls vollständiges Sphärensystem in M^3 ableiten läßt, das ebenfalls eine Halbnormalfläche ist und entweder eine F-Zahl kleiner als f hat, oder die F-Zahl f besitzt und eine Falte enthält. Daraus folgt dann Hilfssatz 2 nach [5], Hauptsatz 1 und nach Satz 3.

Den Beweis führen wir so, daß wir aus $S_1^{*2} + \cdots + S_{m^*}^{*2}$ zunächst ein vollständiges Sphärensystem $S_1^{(2)2} + \cdots + S_{m^*}^{(2)2}$ ableiten, das eine Halbnormalfläche ist, so daß einer der beiden folgenden Fälle vorliegt:

I. Die F-Zahl $f^{(2)}$ von $S_1^{(2)2} + \cdots + S_{m^*}^{(2)2}$ ist entweder kleiner als f, oder es ist $f^{(2)} = f$ und $S_1^{(2)2} + \cdots + S_{m^*}^{(2)2}$ enthält eine Falte; d.h. das Sphärensystem hat bereits die geforderten Eigenschaften.

II. Es ist $f^{(2)} = f$ und es gilt:

II.1. $S_1^{(2)2}$ ist gleich S_1^{*2},

II.2. der Durchschnitt $(S_2^{(2)2} + \cdots + S_{m^*}^{(2)2}) U_i^3$ ist entweder leer oder besteht aus Kreisringen $R_{i1}^{(2)2}, \ldots, R_{i t_i^{(2)}}^{(2)2}$ mit den entsprechenden Eigenschaften, wie sie in Nr. 2 Punkt c) aufgeführt wurden,

II.3. die R-Zahl $r^{(2)} = \sum_{i=1}^{s} t_i^{(2)}$ ist kleiner als r.

Wenn der Fall II vorliegt, leiten wir ein weiteres Sphärensystem $S_1^{(3)2}, \ldots, S_{m^*}^{(3)2}$ mit analogen Eigenschaften ab und fahren so fort, bis wir nach höchstens $r-1$ Schritten zu einem Sphärensystem kommen, für das der angestrebte Fall I vorliegt.

Wir haben also noch zu beweisen: Ist das Sphärensystem $S_2^{(z)2} + \cdots + S_{m^*}^{(z)2}$ gegeben, und liegt der Fall II vor, so existiert ein Sphärensystem $S_1^{(z+1)2}, \ldots,$

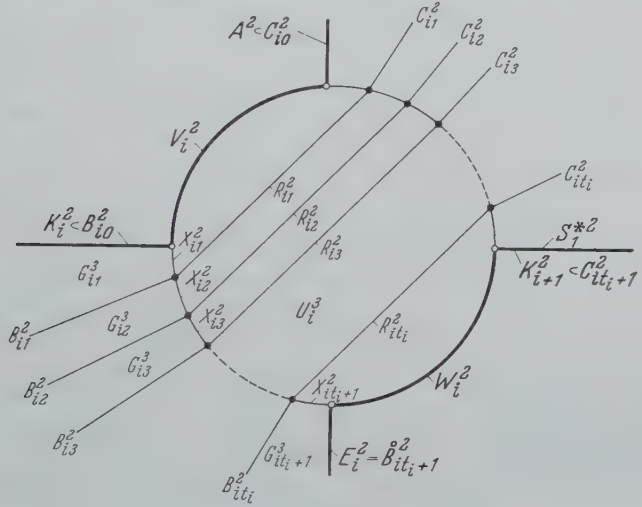


Fig. 12

$S_{m^*}^{(z+1)2}$ für das I oder II (mit $r^{(z+1)} < r^{(z)}$) gilt. — Die Kreisringe $R_{i1}^{(z)2}, \ldots, R_{i t_i^{(z)}}^{(z)2}$ bezeichnen wir der Einfachheit halber, und da Verwechslungen ausgeschlossen sind, wieder mit $R_{i1}^2, \ldots, R_{it_i}^2$. Die Kreisringe, in die X_i^2 durch die R_{ij}^2 zerlegt wird, bezeichnen wir mit $X_{i1}^2, \ldots, X_{it_i+1}^2$. Dann gilt weiter:

3.1. Bei geeigneter Numerierung liegen die Kreisringe X_{ik}^2 und R_{ij}^2 in der Reihenfolge ihrer Numerierung in X_i^2 bzw. U_i^3 (s. Fig. 12), d.h. $\dot{X}_{i1}^2$ enthält

eine 1-Sphäre aus $\dot{K}_i^2$, die 1-Sphäre $\dot{R}_{ij}^2 X_i^2$ liegt in $\dot{X}_{ij}^2$ und in $\dot{X}_{ij+1}^2$ (für alle $j=1,\ldots,t_i$). — Der Kreisring R_{ij}^2 liegt in einer 2-Sphäre $S_{a(i,j)}^{(z)2}$ mit $2 \leqq a(i,j) \leqq m^*$ und $S_{a(i,j)}^{(z)2} - \mathring{R}_{ij}^2$ besteht aus zwei 2-Elementen, die wir mit B_{ij}^2 und C_{ij}^2 bezeichnen, so daß $\dot{B}_{ij}^2 = \dot{R}_{ij}^2 X_i^2$ und $\dot{C}_{ij}^2 = \dot{R}_{ij}^2 Y_i^2$ ist. Der Einheitlichkeit halber bezeichnen wir das 2-Element $\overline{K}_i^2 + W_{i-1}^2 + \overline{E}_{i-1}^2$ mit B_{i0}^2 und $\overline{E}_i^2$ mit $B_{it_i+1}^2$, entsprechend $S_1^{*2} - (B_{i0}^2 + V_i^2)$ mit C_{i0}^2 und $S_1^{*2} - (B_{it_i+1}^2 + W_i^2)$ mit $C_{it_i+1}^2$ (vgl. Fig. 12). Die F-Zahl von B_{ij}^2 nennen wir f_{ij} und die R-Zahl r_{ij}. (Die einzelnen B_{ij}^2 brauchen keineswegs ganz in $\overline{T}_i^3$ zu liegen, insbesondere kann $B_{ij_1}^2$ in $B_{ij_2}^2$ liegen.) Entsprechend seien f_{i0} bzw. f_{it_i+1} und r_{i0} bzw. r_{it_i-1} die F- und R-Zahlen von B_{i0}^2 bzw. $B_{it_i+1}^2$ ($r_{i0} = r_{it_i+1} = 0$). Die kleinste der Zahlen $f_{i1}, \ldots, f_{it_i}$ nennen wir g_i.

3.2. Wir beweisen zunächst zwei Eigenschaften der 2-Elemente B_{ij}^2 und C_{ij}^2:

3.2.1. Jedes 2-Element C_{ij}^2 ($i=1,\ldots,s$; $j=1,\ldots,t_i$) enthält mindestens eines der $B_{i1}^2, \ldots, B_{it_i}^2$, besitzt also eine F-Zahl, die nicht kleiner als g_i ist.

BEWEIS. Aus der Annahme, C_{ij}^2 sei mit T_i^3 punktfremd, folgt: Wir können in $\overline{T}_i^3$ ein beliebiges 2-Element B_{ij}^{*2} mit $\dot{B}_{ij}^{*2} = \dot{B}_{ij}^2$ wählen, dessen Inneres in $\mathring{T}_i^3$ liegt. Dann besteht $\overline{T}_i^3 - B_{ij}^{*2}$ aus zwei z-Komponenten T^{*3} und T^{**3}, so daß (vgl. Fig. 10 und Fig. 12) E_{i-1}^2 in $\dot{T}^{*3}$ liegt und E_i^2 in $\dot{T}^{**3}$. Nun ist $B_{ij}^{*2} + R_{ij}^2 + C_{ij}^2$ eine 2-Sphäre und zerlegt M^3 in zwei z-Komponenten Z^{*3}, Z^{**3}, so daß T^{*3} in Z^{*3} liegt und T^{**3} in Z^{**3}. Da S_1^{*2} mit $B_{ij}^{*2} + R_{ij}^2 + C_{ij}^2$ punktfremd ist, liegt S_1^{*2} entweder in Z^{*3} oder in Z^{**3}. Dieses steht im Widerspruch dazu, daß E_{i-1}^2 in $S_1^{*2} Z^{*3}$ liegt und E_i^2 in $S_1^{*2} Z^{**3}$. Also ist die Annahme falsch, w.z.b.w.

3.2.2. Sind B_{kl}^2 und $B_{kl'}^2$ zwei *„benachbarte"* 2-Elemente ($k=1,\ldots,s$; $l=0,1,\ldots,t_k+1$; $l'=l-1$ oder $l'=l+1$) mit $r_{kl}=0$, so ist B_{kl}^2 mit $B_{kl'}^2$ punktfremd, also $B_{kl}^2 + X_{kl^*}^2 + B_{kl'}^2$ (wobei l^* die größere der beiden Zahlen l und l' bedeutet, vgl. Fig. 12) eine 2-Sphäre. Diejenige z-Komponente von $M^3 - (S_1^{*2} + S_2^{(z)2} + \cdots + S_{m^*}^{(z)2} + X_{kl^*}^2)$, die $B_{kl}^2 + X_{kl^*}^2 + B_{kl'}^2$ im Rande enthält, bezeichnen wir mit $G_{kl^*}^3$.

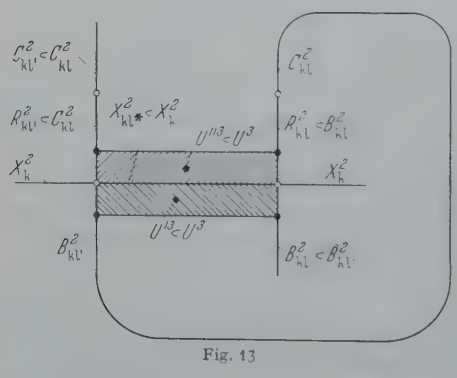


Fig. 13

BEWEIS. Es ist zu beweisen, daß B_{kl}^2 nicht in $B_{kl'}^2$ liegt. Dieses gilt offenbar, wenn $l^*=1$ oder $l^*=t_k+1$ ist. Wir können daher $l^* \neq 1$, t_k+1 voraussetzen. Aus der Annahme B_{kl}^2 läge in $B_{kl'}^2$, folgt: Die 2-Sphäre $S_{a(k,l)}^{(z)2}$ ist gleich $B_{kl'}^2 + R_{kl'}^2 + C_{kl'}^2$ und zerlegt M^3 in zwei z-Komponenten, deren eine — sie werde mit Z^3 bezeichnet — den Kreisring $X_{kl^*}^2$ enthält. Wir betrachten eine kleine Umgebung U^3 von $\overline{X}_{kl^*}^2$ in $\overline{Z}^3$ (s. Fig. 13). $U^3 - \overline{X}_{kl^*}^2$ besteht aus zwei z-Komponenten U'^3 und U''^3, so daß U'^3 in T_k^3 liegt und U''^3 in U_k^3.

Nun ist $B^2_{kl}+X^2_{kl*}+R^2_{kl'}+C^2_{kl'}$ eine 2-Sphäre, die M^3 in zwei z-Komponenten Z'^3 und Z''^3 zerlegt, so daß $\overset{\circ}{U}{}'^3$ in Z'^3 liegt und $\overset{\circ}{U}{}''^3$ in Z''^3. Der offene Kreisring $(B^2_{kl'}-\overset{\circ}{B}{}^2_{kl})$ ist mit $B^2_{kl}+X^2_{kl*}+R^2_{kl'}+C^2_{kl'}$ punktfremd, liegt also entweder in Z'^3 oder in Z''^3. Dieses steht im Widerspruch dazu, daß $\dot{U}'^3\overset{\circ}{B}{}^2_{kl'}$ in $Z'^3(B^2_{kl'}-\overset{\circ}{B}{}^2_{kl})$ liegt und $\dot{U}''^3\overset{\circ}{R}{}^2_{kl}$ in $Z''^3(B^2_{kl'}-\overset{\circ}{B}{}^2_{kl})$ (vgl. Fig. 13). Also ist die Annahme falsch, w.z.b.w.

3.3. Es liegt stets einer der folgenden Fälle vor:

A. Es gibt zwei benachbarte 2-Elemente B^2_{kl} und $B^2_{kl'}$ mit $r_{kl}=0$, wie unter 3.2.2 betrachtet, so daß $f_{kl}\leqq g_k$ oder $t_k=0$ ist ($f_{kl}<g_k$ ist nur dann möglich, wenn $l=0$ oder $l=t_k+1$ ist) und so daß einer der beiden Fälle vorliegt:

A.1. G^3_{kl*} ist keine gelochte 3-Sphäre, und es ist

α) $l'\neq 0$ und $l'\neq t_k+1$ *oder*

β) die F-Zahl von $C^2_{kl'}$ ist größer als f_{kl}.

A.2. G^3_{kl*} ist eine gelochte 3-Sphäre, und es ist entweder

α) $f_{kl'}>f_{kl}$ *oder*

β) $f_{kl'}=f_{kl}$ und $r_{kl'}\neq 0$.

B. Es gibt ein k (zwischen 1 und s) mit $f_{k0}>f_{k1}=f_{k2}=\cdots=f_{kt_k+1}$ und $r_{k1}=\cdots=r_{kt_k}=0$, so daß G^3_{k1} keine gelochte 3-Sphäre ist und $G^3_{k2}, \ldots, G^3_{kt_k+1}$ gelochte 3-Sphären sind.

Beweis. 3.3.1. Es gibt ein k (zwischen 1 und s) mit $f_{k0}>f_{kt_k+1}$.

Beweis. $(B^2_{10}+\cdots+B^2_{s0})-(B^2_{1t_1+1}+\cdots+B^2_{st_s+1})$ ist gleich $\bar{K}^2_1+\cdots+\bar{K}^2_s+W^2_1+\cdots-W^2_s$, besitzt also die gleiche F-Zahl, wie die Normalfläche M^2_2. Also ist $f_{10}+\cdots+f_{s0}>f_{1t_1+1}+\cdots+f_{st_s+1}$. Daraus folgt 3.3.1.

3.3.2. Ist für den (nach 3.3.1 gewählten) Index k $t_k=0$, so gilt 3.3. Denn ist G^3_{k1} keine gelochte 3-Sphäre, so liegt Fall B vor; ist G^3_{k1} eine gelochte 3-Sphäre, so liegt Fall A.2.α vor (mit $l'=0$, $l=1$).

3.3.3. Den Beweis für den Fall $t_k\neq 0$ erhält man durch folgende Gliederung:

a) Gibt es ein j' zwischen 1 und t_k, so daß $f_{kj'}>g_k$ ist *oder* $r_{kj'}\neq 0$, so gilt 3.3.

Beweis. a 1. Es gibt ein j'' zwischen 1 und t_k, so daß $f_{kj''}=g_k$ und $r_{kj''}=0$ ist. Denn n. V. gibt es ein j''', so daß $f_{kj'''}=g_k$ ist; ist nun $r_{kj'''}\neq 0$, so enthält $B^2_{kj'''}$ einen der Kreisringe R^2_{kj}, also auch eines der C^2_{kj} (j zwischen 1 und t_k), und damit (s. 3.2.1) wieder ein $B^2_{kj^{\mathrm{IV}}}$ mit $f_{kj^{\mathrm{IV}}}=g_k$ und $r_{kj^{\mathrm{IV}}}<r_{kj'''}$; ist $r_{kj^{\mathrm{IV}}}\neq 0$, so kann man weiter auf ein j^{V} schließen, usw., bis man nach höchstens $r_{kj'''}$ Schritten zu einem $j^{(w)}=j''$ mit $f_{kj^{(w)}}=g_k$, $r_{kj^{(w)}}=0$ gelangt.

a 2. Es gibt nun zwei Indizes l und l', so daß entweder $j'\leqq l'=l-1<j''$ oder $j'\geqq l'=l+1>j''$ ist, so daß $f_{kl}=g_k$, $r_{kl}=0$ ist, und so daß $f_{kl'}>g_k$ oder $r_{kl'}\neq 0$ ist. Also liegt Fall A.1.α oder Fall A.2 (α oder β) vor. Damit ist a) bewiesen.

b) Ist $f_{k1}=\cdots=f_{kt_k}=g_k$ und $r_{k1}=\cdots=r_{kt_k}=0$, so gilt 3.3 ebenfalls.

BEWEIS. b 1. Gibt es ein l^* zwischen 2 und t_k, so daß $G^3_{k\,l^*}$ keine gelochte 3-Sphäre ist, so liegt Fall A.1.α vor.

b 2. Sind $G^3_{k\,2}, \ldots, G^3_{k\,t_k}$ gelochte 3-Sphären, so gilt 3.3.

BEWEIS. b 2.1. Ist $g_k > f_{k\,t_k+1}$, so liegt (mit $l=t_k+1$, $l'=t_k$) Fall A.1.α oder Fall A.2.α vor.

b 2.2. Ist $g_k = f_{k\,t_k+1}$, so gilt:

b 2.2.1. Ist $G^3_{k\,t_k+1}$ keine gelochte 3-Sphäre, so liegt (mit $l=t_k$, $l'=t_k+1$) Fall A.1.β vor (da $C^2_{k\,t_k+1}$ das 2-Element $B^2_{k\,0}$ enthält, also eine F-Zahl größer als g_k hat).

b 2.2.2. Ist $G^3_{k\,t_k+1}$ eine gelochte 3-Sphäre, so liegt entweder Fall B vor, oder (mit $l=1$, $l'=0$) Fall A.2.α.

b 2.3. Ist $g_k < f_{k\,t_k+1}$, so liegt (mit $l=t_k, l'=t_k+1$) Fall A.1.β oder A.2.α vor.

Damit ist der Beweis für $t_k \neq 0$ vollendet und 3.3 vollständig bewiesen.

3.4. Zunächst machen wir eine Bemerkung über Abänderungen des Sphärensystems $S_1^{(z)\,2} + \cdots + S_{m^*}^{(z)\,2}$: E^2 sei ein 2-Element, dessen Rand in einer 2-Sphäre $S_v^{(z)\,2}$ (v zwischen 1 und m^*) liegt, und das im übrigen mit dem Sphärensystem punktfremd ist. Dann liegt $\dot{E}^2$ in einer z-Komponente Z^3 von $M^3 - (S_1^{(z)\,2} + \cdots + S_{m^*}^{(z)\,2})$ und zerlegt diese in zwei z-Komponenten Z'^3, Z''^3. Durch $\dot{E}^2$ wird $S_v^{(z)\,2}$ in zwei 2-Elemente E'^2 und E''^2 zerlegt, so daß E'^2 in $\dot{Z}'^3$ liegt und E''^2 in $\dot{Z}''^3$. Nun ist (mindestens) eine der Komponenten Z'^3, Z''^3 eine gelochte 3-Sphäre. (Denn anderenfalls ließe sich Z^3 durch eine nahe zu $E^2 + E'^2$ benachbarte 2-Sphäre in zwei z-Komponenten zerlegen, deren keine eine gelochte 3-Sphäre ist; also wäre das Sphärensystem nicht vollständig.) Ist also Z'^3 eine gelochte 3-Sphäre, so kann man das 2-Element E'^2 durch E^2 ersetzen, und das Sphärensystem $S_1^{(z)\,2} + \cdots + S_{m^*}^{(z)\,2}$ geht dadurch in ein Sphärensystem über, das ebenfalls vollständig ist.

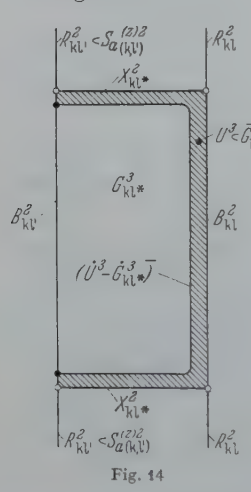


Fig. 14

3.5. Wir erhalten nun das Sphärensystem $S_1^{(z+1)\,2} + \cdots + S_{m^*}^{(z+1)\,2}$ durch folgende Abänderungen von $S_1^{(z)\,2} + \cdots + S_{m^*}^{(z)\,2}$:

3.5.1. Liegt der Fall A.1 (s. 3.3) vor, so wählen wir in $\bar{G}^3_{k\,l^*}$ eine (im Verhältnis zu $\Theta | U^3_k$ kleine) Umgebung U^3 von $B^2_{kl} + \bar{X}^2_{k\,l^*}$, s. Fig. 14. Dann ersetzen wir das 2-Element $S^{(z)\,2}_{a\,(k,l')} - (B^2_{k\,l'} - U^3)$ durch das zu $B^2_{kl} + \bar{X}^2_{k\,l^*}$ benachbarte 2-Element $(\dot{U}^3 - \dot{G}^3_{k\,l^*})^-$ und erhalten so das gesuchte Sphärensystem $S_1^{(z+1)\,2} + \cdots + S_{m^*}^{(z+1)\,2}$. Die Numerierung der erhaltenen 2-Sphären wählen wir so, daß die nicht veränderten 2-Sphären jeweils ihren Index behalten. Wir überzeugen uns davon, daß dieses Sphärensystem die geforderten Eigenschaften besitzt:

a) Da die durchgeführte Abänderung von der in 3.4 beschriebenen Form ist, ist das Sphärensystem vollständig; ferner ist es eine Halbnormalfläche (da U^3 klein im Verhältnis zu Θ ist).

b) Im Falle A.1.α ist $S_1^{(z+1)2} - S_1^{(z)2} = S_1^{*2}$, und $S_2^{(z+1)2} + \cdots + S_{m^*}^{(z+1)2}$ schneidet, ebenso wie $S_1^{(z)2} + \cdots + S_{m^*}^{(z)2}$, die Umgebungen U_i^3 in Kreisringen. Dabei ist die R-Zahl von $S_{a(k,l')}^{(z+1)2}$ gleich der von $B_{kl'}^2$, also kleiner als die von $S_{a(k,l')}^{(z)2}$. Also ist $r^{(z+1)} < r^{(z)}$. Die F-Zahl von $S_{a(k,l')}^{(z+1)2}$ ist gleich $f_{kl} + f_{kl'}$, also nach 3.2.1 nicht größer als die von $S_{a(k,l')}^{(z)2}$. Also ist $f^{(z+1)} \leqq f^{(z)}$. Damit sind alle Bedingungen für das Vorliegen des Falles I oder II erfüllt.

c) Im Falle A.1.β ist die F-Zahl $f_{kl} + f_{kl'}$ von $S_{a(k,l')}^{(z+1)2}$ kleiner als die F-Zahl von $S_{a(k,l')}^{(z)2}$. Also ist $f^{(z+1)} < f^{(z)}$, und es liegt der Fall I vor.

3.5.2. Liegt der Fall A.2 vor, so wählen wir (wie in 3.5.1) eine kleine Umgebung U^3 von $B_{kl}^2 + \bar{X}_{kl*}^2$ in $\bar{G}_{kl*}^3$ (vgl. Fig. 14). Dann ersetzen wir $B_{kl'}^2 - U^3$ durch $\dot{U}^3 - \dot{G}_{kl*}^3$. Das so entstehende Sphärensystem $S_1^{(z+1)2} + \cdots + S_{m^*}^{(z+1)2}$ hat (bei entsprechender Numerierung) die geforderten Eigenschaften, denn im Falle A.2.α ist $f^{(z+1)} < f^{(z)}$, und im Falle A.2.β ist $f^{(z+1)} = f^{(z)}$, $r^{(z+1)} < r^{(z)}$, sowie $S_1^{(z+1)2} = S_1^{(z)2} = S_1^{*2}$ [da bei $r_{kl'} \neq 0$ stets $a(k,l') \neq 1$ ist].

3.5.3. Liegt der Fall B vor, so wählen wir in $\bar{T}_k^3$ ein (im Verhältnis zu $S_1^{(z)2} + \cdots + S_{m^*}^{(z)2} | \Theta$) nahe zu $B_{kt_k-1}^2 + X_{kt_k+1}^2$ benachbartes 2-Element, das wir

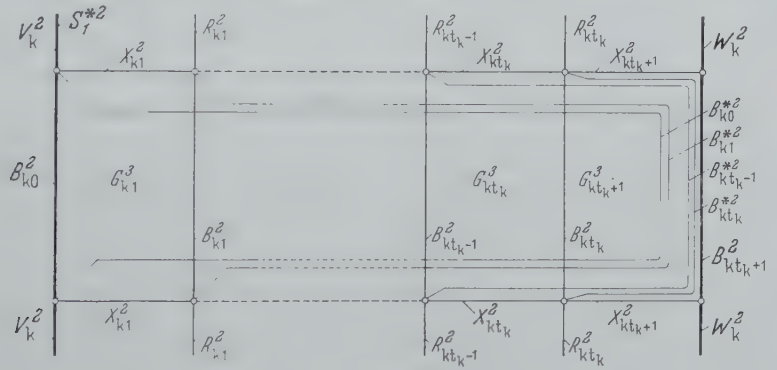


Fig. 15

$B_{kt_k}^{*2}$ nennen, und ersetzen $B_{kt_k}^2$ durch $B_{kt_k}^{*2}$. Dann wählen wir ein zu $B_{kt_k}^{*2} + X_{kt_k}^2$ nahe benachbartes 2-Element $B_{kt_k-1}^{*2}$ und ersetzen $B_{kt_k-1}^2$ durch $B_{kt_k-1}^{*2}$, und so fort, bis wir B_{k1}^2 durch B_{k1}^{*2} ersetzt haben, s. Fig. 15. Schließlich wählen wir ein zu $B_{k1}^{*2} + X_{k1}^2$ benachbartes 2-Element B_{k0}^{*2} und ersetzen $S_1^{*2} - B_{k0}^2$ durch B_{k0}^{*2}. (Dieses ist eine Folge von Abänderungen der in 3.4 beschriebenen Art.) Die entstehenden 2-Sphären numerieren wir so, daß $B_{k0}^2 + B_{k0}^{*2} = S_1^{(z+1)2}$ ist. Dann ist die F-Zahl von $S_2^{(z+1)2} + \cdots + S_{m^*}^{(z+1)2}$ gleich der von $S_2^{(z)2} + \cdots + S_{m^*}^{(z)2}$, und $S_1^{(z+1)2}$ ist bezüglich Θ ähnlich zu der 2-Sphäre $B_{k0}^2 + X_k^2 + B_{kl_k+1}^2$. Diese 2-Sphäre ist aber eine z-Komponente der 2-Mannigfaltigkeit $\sigma_s \ldots \sigma_{k+1} \bar{\sigma}_k \sigma_{k-1} \ldots \sigma_1 (M_1^2 + M_2^2)$, wenn $\bar{\sigma}_k$ die zu σ_k entgegengesetzte Umschaltung bedeutet. Diese 2-Mannigfaltigkeit besitzt nach [5], Hauptsatz 4 dieselbe F-Zahl wie

S_1^{*2} und enthält eine Falte. Also ist entweder $f^{(z+1)} < f^{(z)}$, oder es ist $f^{(z+1)} = f^{(z)}$ und $S_1^{(z+1)2}$ enthält eine Falte, womit das Sphärensystem die geforderten Eigenschaften (für das Vorliegen von Fall I) besitzt.

Mit 3.5.1, 3.5.2 und 3.5.3 ist die Existenz des Sphärensystems $S_1^{(z+1)2} + \cdots + S_{m^*}^{(z+1)2}$ für die unter 3.3 genannten Fälle nachgewiesen, deren einer stets vorliegt. Damit ist der Beweis des Hilfssatzes 2 vollendet.

BESTIMMUNGSVERFAHREN 2. *Ist M^3 eine kreuzhauben-, henkel- und randsphärenfreie, sonst beliebige (zusammenhängende, berandete oder unberandete) 3-Mannigfaltigkeit, so läßt sich (in einer beschränkten Anzahl von Schritten) ein vollständiges Sphärensystem in M^3 konstruieren und damit eine Aufspaltung der 3-Mannigfaltigkeit M^3 bzw. ihrer Äquivalenzklasse $\mathfrak{M}^3$ in irreduzible Erzeugende angeben.*

Dieses kann folgendermaßen geschehen: Es wird eine Normalzerlegung Θ bezüglich einer beliebigen randtreuen Zerlegung Γ von M^3 in offene Raumelemente gewählt. Dann wird aus jeder der Fundamentalklassen bezüglich Θ ein Repräsentant konstruiert, und unter diesen Repräsentanten werden diejenigen ausgewählt, die 2-Sphären sind; ihre P-Zahlenvektoren seien $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_t$. Diese 2-Sphären werden ohne Veränderung ihrer Ähnlichkeitsklassen so deformiert, daß je zwei von ihnen entweder miteinander punktfremd werden, oder einander nur in geschlossenen Linien durchdringen. Die so erhaltenen 2-Sphären seien $S_1^2, \ldots, S_t^2$. Hierbei läßt sich erreichen, daß folgendes gilt: Gibt es zu $S_{i_1}^2$, $S_{i_2}^2$ (i_1, i_2 zwischen 1 und t) zwei bezüglich Θ ähnliche 2-Sphären, die miteinander punktfremd sind, so sind auch bereits $S_{i_1}^2$, $S_{i_2}^2$ miteinander punktfremd. Enthält eine 2-Sphäre S_i^2 Durchdringungslinien mit anderen 2-Sphären S_i^2, so beseitigen wir diese Durchdringungslinien durch ϱ-Operationen und gelangen nach einer beschränkten Anzahl von Schritten zu einem System von miteinander punktfremden 2-Sphären $S_1'^2, \ldots, S_u'^2$. Dabei lassen sich die ϱ-Operationen so wählen, daß folgendes gilt: Sind $S_1^2, \ldots, S_t^2$ durch die ersten k ϱ-Operationen in $S_{(k)1}^2, \ldots, S_{(k)t^*}^2$ übergegangen und wird $S_{(k)1}^2$ durch die $(k+1)$-te ϱ-Operation abgeändert, so ist der Kern dieser ϱ-Operation mit allen denjenigen $S_{(k)i}^2$ (i zwischen 1 und t^*) punktfremd, mit denen $S_{(k)1}^2$ punktfremd ist. Unter den 2-Sphären können wir diejenigen fortlassen, die sich als kompressibel oder als geometrisch von den übrigen abhängig erkennen lassen. Können alle 2-Sphären in dieser Weise fortgelassen werden, so ist M^3 irreduzibel; anderenfalls bilden die restlichen 2-Sphären $S_1''^2, \ldots, S_v''^2$ ein vollständiges Sphärensystem in M^3 und die Ergänzung der z-Komponenten von $M^3 - (S_1''^2 + \cdots + S_v''^2)$ durch 3-Elemente $E_1^3, E_1^{*3}, \ldots, E_v^3, E_v^{*3}$ mit $E_i^3 = E_i^{*3} = S_i''^2$ (für alle $i = 1, \ldots, v$), deren Innenteile miteinander und mit M^3 punktfremd sind, ergibt eine Aufspaltung von M^3 in irreduzible Erzeugende.

BEWEIS. Es ist noch zu beweisen, daß das Sphärensystem $S_1''^2 + \cdots + S_v'^2$ in M^3 vollständig ist: Aus dem Endlichkeitssatz 1 folgt, daß ein vollständiges Sphärensystem in M^3 existiert. Daraus folgt nach [5], Hauptsatz 1 und nach Satz 3, daß ein vollständiges Sphärensystem $S_1^{(1)2} + \cdots + S_m^{(1)2}$ in M^3

existiert, das eine Normalfläche bezüglich Θ ist; ihre F-Zahl sei $f^{(1)}$. Sind nun die P-Zahlenvektoren von $S_1^{(1)2}, \ldots, S_m^{(1)2}$ nicht sämtlich Fundamentallösungen der P-Gleichungen, so existiert nach Hilfssatz 2 ein vollständiges Sphärensystem $S_1^{(2)2} + \cdots + S_{m^{(2)}}^{(2)2}$ in M^3, das ebenfalls eine Normalfläche ist, und dessen F-Zahl $f^{(2)}$ kleiner ist als $f^{(1)}$. So läßt sich weiter auf die Existenz eines vollständigen Sphärensystems $S_1^{*2}, \ldots, S_{m^*}^{*2}$ in M^3 schließen, so daß jede der 2-Sphären in einer der Fundamentalklassen liegt und keine zwei von ihnen in derselben Klasse liegen (denn ähnliche 2-Sphären sind geometrisch abhängig). Unter den oben konstruierten 2-Sphären $S_1^2, \ldots, S_l^2$ befinden sich also m^* — sie mögen mit $S_{i_1}^2, \ldots, S_{i_{m^*}}^2$ bezeichnet werden —, deren Summe zu $S_1^{*2} + \cdots + S_{m^*}^{*2}$ bezüglich Θ ähnlich ist, die also ein vollständiges Sphärensystem in M^3 bilden. Bei den Operationen, durch die die 2-Sphären $S_1^2, \ldots, S_l^2$ in die miteinander punktfremden 2-Sphären $S_1'^2, \ldots, S_u'^2$ übergeführt werden, wird das Sphärensystem $S_{i_1}^2 + \cdots + S_{i_{m^*}}^2$, wenn überhaupt, nur durch ϱ-Operationen verändert, geht dabei also nach Satz 3 in ein vollständiges Sphärensystem über. Da dieses Sphärensystem in $S_1'^2 + \cdots + S_u'^2$ liegt, ist also auch $S_1'^2 + \cdots + S_u'^2$ vollständig, und damit auch das durch Fortlassen geometrisch abhängiger 2-Sphären entstehende Sphärensystem $S_1''^2 + \cdots + S_v''^2$, w.z.b.w.

Folgerung 1. *Ist eine beliebige (zusammenhängende, berandete oder unberandete) 3-Mannigfaltigkeit M^3 gegeben, so läßt sich (in einer beschränkten Anzahl von Schritten) ein vollständiges Sphärensystem in M^3 konstruieren und damit eine Aufspaltung von M^3 bzw. $\mathfrak{M}^3$ in irreduzible Erzeugende angeben. Ferner lassen sich Henkel- und Kreuzhaubenzahl von M^3 bestimmen.*

Hierzu wird zunächst ebenso vorgegangen, wie beim Bestimmungsverfahren 1: Durch Reduktion der Kreuzhauben $K_1^3, \ldots, K_k^3$ und der Henkel $H_1^3, \ldots, H_h^3$ und Ausfüllen der Randsphären wird eine kreuzhauben-, henkel- und randsphärenfreie 3-Mannigfaltigkeit M'^3 hergestellt. (k und h sind Kreuzhauben- und Henkelzahl von M^3.) In M'^3 läßt sich nach Bestimmungsverfahren 2 ein vollständiges Sphärensystem $S_1^2 + \cdots + S_v^2$ konstruieren. Dabei läßt sich durch isotope Deformationen erreichen, daß dieses Sphärensystem in $M^3 - (K_1^3 + \cdots + K_k^3 + H_1^3 + \cdots + H_h^3)$ liegt. Dann ist $S_1^2 + \cdots + S_v^2 + \dot{K}_1^3 + \cdots + \dot{K}_k^3 + \dot{H}_1^3 + \cdots + \dot{H}_h^3$ ein vollständiges Sphärensystem in M^3 (das aus $v + k + 2h$ 2-Sphären besteht); denn jede mit diesen 2-Sphären punktfremde 2-Sphäre in M^3 liegt entweder in $M^3 - (K_1^3 + \cdots + K_k^3 + H_1^3 + \cdots + H_h^3)$ (und ist von $S_1^2, \ldots, \dot{H}_h^3$ geometrisch abhängig) oder in einer der Kreuzhauben K_i^3 (und ist von $\dot{K}_i^3$ geometrisch abhängig, da der projektive Raum nach Satz 7 irreduzibel ist) oder in einer der zweifach gelochten 3-Sphären H_j^3 (und ist von $\dot{H}_j^3$ geometrisch abhängig).

Folgerung 2. *Durch die Bestimmungsverfahren 1 und 2 und die Eindeutigkeitssätze 1 und 2 ist das Homöomorphieproblem der (kompakten, berandeten oder unberandeten) 3-Mannigfaltigkeiten auf das der irreduziblen 3-Mannigfaltigkeiten zurückgeführt (im Falle orientierbarer 3-Mannigfaltigkeiten auf das der orientierten irreduziblen 3-Mannigfaltigkeiten).*

Denn sind zwei kompakte 3-Mannigfaltigkeiten M_1^3 und M_2^3 vorgelegt, so lassen sich nach Folgerung 1 die Henkelzahlen, je eine Aufspaltung in irreduzible Erzeugende (und trivialer Weise auch die Randsphärenzahlen und die Orientierbarkeitscharaktere) von M_1^3 und M_2^3 bestimmen. Damit läßt sich feststellen, ob die Henkelzahlen, Randsphärenzahlen und Orientierbarkeitscharaktere übereinstimmen; die beiden 3-Mannigfaltigkeiten sind nach den Eindeutigkeitssätzen 1 und 2 dann und nur dann homöomorph, wenn dieses der Fall ist und wenn unter den konstruierten irreduziblen Erzeugenden diejenigen paarweise homöomorph sind (bei orientierbaren M_1^3, M_2^3 mit entsprechenden Orientierungen), die keine 3-Sphären sind.

FOLGERUNG 3. *Ist M^3 eine beliebige (zusammenhängende, berandete oder unberandete) 3-Mannigfaltigkeit, und sind in M^3 beliebige, miteinander punktfremde, zusammenhängende abgeschlossene Punktmengen $P_1, \ldots, P_s$ gegeben, so läßt sich (in einer beschränkten Anzahl von Schritten) entscheiden, ob $P_1, \ldots, P_s$ in M^3 miteinander verkettet seien. Insbesondere läßt sich in M^3 ein mit $P_1, \ldots, P_s$ punktfremdes Sphärensystem $S_1^2 + \cdots + S_w^2$ konstruieren, so daß folgendes gilt: Die Punktmengen $P_{i_1}, \ldots, P_{i_t}$ ($i_1, \ldots, i_t$ beliebig zwischen 1 und s) sind dann und nur dann miteinander verkettet in M^3, wenn sie in einer und derselben z-Komponente von $M^3 - (S_1^2 + \cdots + S_w^2)$ liegen.*

Hierzu werden in M^3 kleine Umgebungen $U_1^3, \ldots, U_s^3$ von $P_1, \ldots, P_s$ gewählt. Die 3-Mannigfaltigkeit $M^3 - (\mathring{U}_1^3 + \cdots + \mathring{U}_s^3)$ ist nicht notwendig zusammenhängend; ihre z-Komponenten bezeichnen wir mit $M_1^3, \ldots, M_p^3$. In den 3-Mannigfaltigkeiten $M_1^3, \ldots, M_p^3$ konstruieren wir, wie in Folgerung 1 beschrieben, je ein vollständiges Sphärensystem $S_{11}^2 + \cdots + S_{1v_1}^2, \ldots, S_{p1}^2 + \cdots + S_{pv_p}^2$ Liegen in M_j^3 ($j = 1, \ldots, p$) 2-Sphären, so werden diese mit $S_{j1}'^2, \ldots, S_{jg_j}'^2$ bezeichnet, und zu jeder von ihnen wird in M_j^3 eine nahe benachbarte 2-Sphäre $S_{j1}^{*2}, \ldots, S_{jg_j}^{*2}$ gewählt. Dann ist $S_{11}^2 + \cdots + S_{pv_p}^2 + S_{11}^{*2} + \cdots + S_{pg_p}^{*2}$ ein Sphärensystem — bei einfacher Numerierung schreiben wir es als $S_1^2 + \cdots + S_w^2$ — mit den geforderten Eigenschaften.

BEWEIS. Es genügt, folgendes zu beweisen: Fügen wir in M^3 zu dem Sphärensystem $S_1^2 + \cdots + S_w^2$ eine beliebige Anzahl von 2-Sphären $S_{w+1}^2, \ldots, S_{w+q}^2$ hinzu, die miteinander, mit $S_1^2, \ldots, S_w^2$ und mit $U_1^3, \ldots, U_s^3$ punktfremd sind, so gilt: liegen zwei Punktmengen P_{i_1}, P_{i_2} (i_1, i_2 beliebig zwischen 1 und s) in einer und derselben z-Komponente von $M^3 - (S_1^2 + \cdots + S_w^2)$, so liegen sie auch in einer und derselben z-Komponente von $M^3 - (S_1^2 + \cdots + S_{w+q}^2)$. — Wir machen die Induktionsannahme, die Behauptung sei für $q = r$ bewiesen ($r = 0, 1, 2, \ldots$); dann gilt für $q = r + 1$: S_{w+r+1}^2 liegt in einer der 3-Mannigfaltigkeiten $M_1^3, \ldots, M_p^3$ — etwa in M_l^3 —, also in einer z-Komponente Z^3 von $M_l^3 - (S_1^2 + \cdots + S_{w+r}^2)$. Da der in M_l^3 liegende Teil des Sphärensystems $S_1^2 + \cdots + S_{w+r}^2$ ein vollständiges Sphärensystem in M_l^3 ist, wird Z^3 durch S_{w+r+1}^2 in zwei z-Komponenten Z'^3 und Z''^3 zerlegt, deren mindestens eine — diese sei Z'^3 — eine gelochte 3-Sphäre ist. Nun ist Z'^3 entweder mit allen Umgebungen $U_1^3, \ldots, U_s^3$ punktfremd, oder Z'^3 enthält genau eine der 2-Sphären $S_{lm}'^2$ (m zwischen 1 und g_l). Im letzteren Falle ist Z''^3 mit den Umgebungen

$U_1^3, \ldots, U_s^3$ punktfremd; denn dann kann Z^3 außer $S_{lm}'^2$ keine weiteren Punkte aus $U_1^3, \ldots, U_s^3$ enthalten (weil sich unter den $S_1^2, \ldots, S_w^2$ die 2-Sphäre S_{lm}^{*2} befindet, die in M_l^3 zusammen mit $S_{lm}'^2$ eine zweifach gelochte 3-Sphäre berandet, in der Z^3 liegt). Also ist in jedem Falle mindestens eine der z-Komponenten Z'^3, Z''^3 — sie werde mit Z^{*3} bezeichnet — mit $U_1^3, \ldots, U_s^3$ punktfremd. — Nun werde die z-Komponente von $M^3 - (S_1^2 + \cdots + S_{w+r}^2)$, in der S_{w+r+1}^2 liegt, mit T^3 bezeichnet. Dann wird T^3 durch S_{w+r+1}^2 in zwei z-Komponenten zerlegt, deren eine Z^{*3} ist; denn da Z^{*3} eine mit $U_1^3, \ldots, U_s^3$ punktfremde z-Komponente von $M_l^3 - (S_1^2 + \cdots + S_{w+r+1}^2)$ ist, ist Z^{*3} auch eine z-Komponente von $M^3 - (S_1^2 + \cdots + S_{w+r+1}^2)$. Die andere z-Komponente von $T^3 - S_{w+r+1}^2$ werde mit T'^3 bezeichnet. Liegen nun P_{i_1} und P_{i_2} in einer von T^3 verschiedenen z-Komponente von $M^3 - (S_1^2 - \cdots - S_{w+r}^2)$, so ist diese auch eine z-Komponente von $M^3 - (S_1^2 + \cdots + S_{w+r+1}^2)$; liegen P_{i_1} und P_{i_2} in T^3, so liegen sie in T'^3, (da Z^{*3} mit $P_1, \ldots, P_s$ punktfremd ist). Damit ist die Behauptung für $q = r + 1$ bewiesen; da sie für $q = 0$ trivial ist, ist der Induktionsbeweis damit vollendet.

Literatur

[1] Alexander, J. W.: On the subdivision of polyhedra in 3-space. Proc. Nat. Acad. Sci. **10**, 6—8 (1924).

[2] Alexandroff, P., u. H. Hopf: Topologie. Berlin 1935.

[3] Bing, R. H.: An alternative proof that 3-manifolds can be triangulated. Ann. Math. **69**, 37—65 (1959).

[4] Fox, R. H.: On the imbedding of polyhedra in 3-space. Ann. Math. **49**, 462—470 (1948).

[5] Haken, W.: Theorie der Normalflächen. Ein Isotopiekriterium für den Kreisknoten. Acta math. **105**, 245—375 (1961).

[6] Kneser, H.: Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten. Jber. dtsch. Mathematikervereinig. **38**, 248—260 (1929).

[7] Milnor, J. W.: A unique decomposition theorem for 3-manifolds. Im Druck.

[8] Moise, E. E.: Affine structures in 3-manifolds. V. Ann. Math. **56**, 96—114 (1952).

[9] — Affine Structures in 3-manifolds. VIII. Ann. Math. **59**, 159—170 (1954).

[10] Papakyriakopoulos, C. D.: On Dehn's lemma and the asphericity of knots. Ann. Math. **66**, 1—26 (1957).

[11] — Some problems on 3-dimensional manifolds. Bull. Amer. Math. Soc. **64**, 317—335 (1958).

[12] Reidemeister, K.: Topologie der Polyeder und kombinatorische Topologie der Komplexe. Leipzig 1953.

[13] Seifert, H., u. W. Threlfall: Lehrbuch der Topologie. Leipzig 1934.

[14] Whitehead, J. H. C.: On 2-spheres in 3-manifolds. Bull. Amer. Math. Soc. **64**, 161—166 (1958).

München, Winthirplatz 5

(Eingegangen am 15. Dezember 1960)

Bierlein, D.
Math. Zeitschr. 76, 468—471 (1961)

Der Graph meßbarer Funktionen mit abstraktem Definitionsbereich

Von
Dieter Bierlein

Für eine reelle Funktion f, die auf einem *topologischen* Raum M definiert ist, sind Beziehungen zwischen der Meßbarkeit der Funktion und ihrem Graphen $X(f) := \{(x, f(x)) : x \in M\}$ bekannt oder unschwer aus bekannten Sätzen zu gewinnen. Hinreichend für die Meßbarkeit von f ist die Bedingung

(*) $X(f)$ ist eine Suslinsche analytische Menge bezüglich der Produkttopologie auf der Produktmenge $(M, \boldsymbol{R}^1)$,

falls M noch bestimmten — von der Art der Meßbarkeit abhängigen — topologischen Voraussetzungen unterworfen ist[1]). So ist z.B. unter der recht kräftigen Einschränkung, daß M eine separable, absolut analytische Menge ist, die Bedingung (*) hinreichend dafür, daß f Borel-meßbar (Bairesch) ist[2]). Die Theorie der Kapazitäten über topologischen Räumen[3]) bietet die Möglichkeit, schwächere Bedingungen für M zu finden, die zusammen mit (*) hinreichend sind für die Meßbarkeit von f bezüglich der Vervollständigung eines auf dem σ-Körper der Borelschen Mengen definierten Maßes; dabei ist die Tatsache auszunützen, daß das äußere Maß eine Kapazität ist.

Ein neueres Ergebnis von Choquet über abstrakte Kapazitäten[4]) erlaubt es — wie in dieser Arbeit ausgeführt wird — sich von topologischen Voraussetzungen völlig freizumachen und im Fall eines beliebigen vollständigen Maßfeldes $(M, \mathfrak{R}, \mu)$ eine zu (*) analoge Bedingung als hinreichend für die μ-Meßbarkeit von f zu gewinnen, wodurch sich zugleich erweist, daß die Voraussetzungen über M, die für die Anwendung der („klassischen") Theorie der Kapazitäten über topologischen Räumen zu beachten sind, tatsächlich überflüssig sind. Unter einem vollständigen Maßfeld soll dabei ein Tripel aus einer Menge M, einem σ-Körper $\mathfrak{R}$ von Teilmengen von M und einem vollständigen (σ-additiven) Maß[5]) μ mit $\mathfrak{R}$ als Definitionsbereich verstanden werden.

Für den Zusammenhang zwischen Graph und Meßbarkeit einer Funktion ergibt sich aus Satz 1 dann folgendes Bild:

$f|M$ ist genau dann μ-meßbar, wenn $X(f)$ ein $\overline{R_\sigma}$ ist, d.h. wenn der Graph sich als Komplement einer abzählbaren Vereinigung von „Rechtecken"

[1]) Vgl. [2], [3], [5] u.a.
[2]) Vgl. [5], Satz 43.2.1.
[3]) Vgl. [3].
[4]) Vgl. [4].
[5]) Im Sinn von [6], (I 3.4).

$R=(K, B)$ mit „Seiten" K aus $\mathfrak{K}$ und B aus $\mathfrak{B}$, dem σ-Körper der Borel-Mengen des $\boldsymbol{R}^1$, darstellen läßt. Dabei stimmt die Menge der Graphen, die sich als Kern eines Suslin-Schemas[6]) aus Rechtecken der Form (K, B) darstellen lassen (kurz: $\mathfrak{R}$-Suslinsche Graphen), mit der Menge der Graphen $X(f)\in{}^{B}(\mathfrak{K}\times\mathfrak{B})$ und mit der Menge der Graphen vom Typ $\overline{R_\sigma}$ überein. Es gibt also überhaupt keine Funktion, deren Graph $\mathfrak{R}$-Suslinsch ist oder zu ${}^{B}(\mathfrak{K}\times\mathfrak{B})$ gehört, aber nicht vom Typ $\overline{R_\sigma}$ ist. Anders formuliert:

Ist f μ-meßbar, so ist $X(f)$ sogar ein $\overline{R_\sigma}$,

ist f nicht μ-meßbar, so ist $X(f)$ nicht einmal $\mathfrak{R}$-Suslinsch.

Bezeichnungen und Definitionen:

$\boldsymbol{N}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen,
$\boldsymbol{F}:=\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}}$ die Menge der Folgen natürlicher Zahlen;
für $\boldsymbol{F}\ni\sigma=(n_1, n_2, \ldots)$ setzen wir $\mathfrak{n}_k(\sigma):=(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Ist $\mathfrak{L}$ ein System von Teilmengen einer festen Menge, dann sei

${}^{R}\mathfrak{L}$ der kleinste $\sigma\delta$-Ring[7]), der $\mathfrak{L}$ umfaßt
(in [1]: ${}^{R}\mathfrak{L}={}^{B}\mathfrak{L}$, „kleinstes Borelsches System über $\mathfrak{L}$"),

${}^{B}\mathfrak{L}$ der kleinste σ-Körper, der $\mathfrak{L}$ umfaßt
(„Borelsche Erweiterung von $\mathfrak{L}$"),

${}^{S}\mathfrak{L}$ das System der Suslin-Kerne zu $\mathfrak{L}$
(„Suslinsche Erweiterung von $\mathfrak{L}$"; in [4]: System der „$\mathfrak{L}$-Suslinschen" Mengen).

Wie üblich ist dabei definiert: Ein *Suslin-Schema* zu $\mathfrak{L}$ ist ein System $(L_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{n}\in\boldsymbol{N}^k,\, k\in\boldsymbol{N}}$ mit $L_{\mathfrak{n}}\in\mathfrak{L}$; der *Kern* des Schemas $(L_{\mathfrak{n}})$ ist die Menge $\sum\limits_{\sigma\in\boldsymbol{F}}^{\cdot}\prod\limits_{k\in\boldsymbol{N}}^{\cdot} L_{\mathfrak{n}_k(\sigma)}$.

Es sei daran erinnert, daß $\mathfrak{L}\subset{}^{R}\mathfrak{L}\subset{}^{S}\mathfrak{L}={}^{S}({}^{S}\mathfrak{L})$ allgemein gilt und ${}^{R}\mathfrak{L}={}^{B}\mathfrak{L}$ dann, wenn $\overline{L}\in{}^{R}\mathfrak{L}$ für jedes $L\in\mathfrak{L}$[8]).

Ist $A\subset(M_1, M_2)$, dann bezeichne $pr_{M_k}A$ die Projektion von A auf M_k. Ist $\mathfrak{L}_\varkappa$ ein System von Teilmengen von $M_\varkappa$, dann sei

$$\mathscr{R}(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2):=\{(L_1, L_2): L_\varkappa\in\mathfrak{L}_\varkappa\},$$

also das System der „Rechtecke" mit „Seiten" aus $\mathfrak{L}_1$ bzw. $\mathfrak{L}_2$.

Zum Beweis des angekündigten Satzes verwenden wir zwei Hilfssätze:

Hilfssatz 1. *Ist $(M, \mathfrak{K}, \mu)$ ein vollständiges Maßfeld, so ist ${}^{S}\mathfrak{K}=\mathfrak{K}$.*

Beweis. Das zu μ gehörige äußere Maß μ^* ist eine abstrakte Kapazität über $(M, \mathfrak{K})$ im Sinn von Choquet [4], S. 84. Eine Menge $A\subset M$ ist in diesem Sinne genau dann $(\mu^*, \mathfrak{K})$-kapazitabel, wenn $\mu_*(A)=\mu^*(A)$ ist; wegen der Vollständigkeit von μ also genau dann, wenn A μ-meßbar ist; d.h. im Fall $A\in\mathfrak{K}$. Da alle Mengen aus ${}^{S}\mathfrak{K}$ nach [4], Théorème 1, $(\mu^*, \mathfrak{K})$-kapazitabel sind, folgt ${}^{S}\mathfrak{K}\subset\mathfrak{K}$ und damit wegen der allgemeinen Beziehung $\mathfrak{L}\subset{}^{S}\mathfrak{L}$ die Behauptung.

---

[6]) Definition s. unten.

[7]) $\mathfrak{L}_1$ heißt $\sigma\delta$-Ring, falls mit $L_n\in\mathfrak{L}_1$ $(n\in\boldsymbol{N})$ stets auch $\sum\limits_{n}^{\cdot} L_n$ und $\prod\limits_{n}^{\cdot} L_n\in\mathfrak{L}_1$.

[8]) Vgl. z.B. [1], 2.9.

HILFSSATZ 2. *$\mathfrak{R}$ sei ein σ-Körper von Teilmengen von M; dann gelten die Beziehungen*

a) ${}^{B}(\mathfrak{R}\times\mathfrak{B})\subset{}^{S}\mathscr{R}(\mathfrak{R},\mathfrak{B})$,

b) *Für* $A\in{}^{S}\mathscr{R}(\mathfrak{R},\mathfrak{B})$ *folgt* $pr_M A\in{}^{S}\mathfrak{R}$.

BEWEIS. 1. Es sei $\mathfrak{J}:=\{[a,b]\colon -\infty<a\leqq b<\infty\}$; dann gilt wegen ${}^{B}\mathfrak{J}=\mathfrak{B}$ zunächst $\mathscr{R}(\mathfrak{R},\mathfrak{B})\subset{}^{B}\mathscr{R}(\mathfrak{R},\mathfrak{J})$. Da für $R=(K,J)\in\mathscr{R}(\mathfrak{R},\mathfrak{J})$ stets $\overline{R}=(\overline{K},J)+(M,\overline{J})\in{}^{R}\mathscr{R}(\mathfrak{R},\mathfrak{J})$, gilt ${}^{R}\mathscr{R}(\mathfrak{R},\mathfrak{J})={}^{B}\mathscr{R}(\mathfrak{R},\mathfrak{J})$. Daraus erhalten wir

$$\mathscr{R}(\mathfrak{R},\mathfrak{B})\subset{}^{B}\mathscr{R}(\mathfrak{R},\mathfrak{J})={}^{R}\mathscr{R}(\mathfrak{R},\mathfrak{J})\subset{}^{S}\mathscr{R}(\mathfrak{R},\mathfrak{J})\subset{}^{S}\mathscr{R}(\mathfrak{R},\mathfrak{B}). \tag{1}$$

Gehen wir in (1) gliedweise zur Suslinschen Erweiterung über, so gelangen wir wegen der allgemeinen Relation ${}^{S}({}^{S}\mathfrak{L})={}^{S}\mathfrak{L}$ zu

$${}^{S}\mathscr{R}(\mathfrak{R},\mathfrak{B})={}^{S}\mathscr{R}(\mathfrak{R},\mathfrak{J}). \tag{2}$$

Aus (1) erhält man wegen ${}^{B}\mathscr{R}(\mathfrak{R},\mathfrak{J})={}^{B}(\mathfrak{R}\times\mathfrak{B})$ unmittelbar Beh. a).

2. Zu $A\in{}^{S}\mathscr{R}(\mathfrak{R},\mathfrak{B})$ existiert wegen (2) ein Suslin-Schema $(R_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{n}\in\boldsymbol{N}^k,\,k\in\boldsymbol{N}}$ mit den Eigenschaften

$\alpha)$ $R_{\mathfrak{n}}=(K_{\mathfrak{n}},J_{\mathfrak{n}})\in\mathscr{R}(\mathfrak{R},\mathfrak{J})$,

$\beta)$ $A=\sum_{\sigma\in\boldsymbol{F}}^{\cdot}\prod_{k\in\boldsymbol{N}}^{\cdot}R_{\mathfrak{n}_k(\sigma)}$,

wobei wir o.E.d.A. folgende Normierungen vornehmen:

$\gamma)$ $R_{n_1,\ldots,n_{k+1}}\subset R_{n_1,\ldots,n_k}$,

$\delta)$ $K_{\mathfrak{n}}=J_{\mathfrak{n}}=0$ für $R_{\mathfrak{n}}=0$.

Wegen (γ) und (δ) folgt

$$J_{n_1,\ldots,n_{k+1}}\subset J_{n_1,\ldots,n_k}. \tag{3}$$

Für jedes $\sigma\in\boldsymbol{F}$ sei $R_\sigma:=\prod_{k}^{\cdot}R_{\mathfrak{n}_k(\sigma)}$; analog definieren wir K_σ und J_σ; endlich sei $\boldsymbol{F}_1:=\{\sigma\colon J_\sigma\neq 0\}$.

Dann ist $A=\sum_{\sigma\in\boldsymbol{F}}^{\cdot}R_\sigma$, $R_\sigma=(K_\sigma,J_\sigma)$ und folglich

$$pr_M A=\sum_{\sigma\in\boldsymbol{F}}^{\cdot}pr_M R_\sigma=\sum_{\sigma\in\boldsymbol{F}_1}^{\cdot}K_\sigma. \tag{4}$$

Zu jedem $\sigma\in\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}_1$ existiert wegen (3) ein $k_0=k_0(\sigma)$, so daß $J_{\mathfrak{n}_0}=0$ für $\mathfrak{n}_0:=\mathfrak{n}_{k_0}(\sigma)$; daraus folgt $R_{\mathfrak{n}_0}=0$, wegen (δ) dann auch $K_{\mathfrak{n}_0}=0$ und deshalb $K_\sigma=0$.

Somit geht (4) über in $pr_M A=\sum_{\sigma\in\boldsymbol{F}}^{\cdot}\prod_{k\in\boldsymbol{N}}^{\cdot}K_{\mathfrak{n}_k(\sigma)}$. Dies bedeutet gerade, daß $pr_M A$ Kern des Suslin-Schemas $(K_{\mathfrak{n}})$ ist, also zu ${}^{S}\mathfrak{R}$ gehört: Beh. b).

SATZ 1. *Ist $(M,\mathfrak{R},\mu)$ ein vollständiges Maßfeld und $\mathfrak{R}=\mathscr{R}(\mathfrak{R},\mathfrak{B})$, dann sind die folgenden vier Aussagen äquivalent:*

(1) *f ist μ-meßbar ($\mathfrak{R}$-meßbar)*

(2) *$X(f)$ ist ein $\overline{R}_\sigma$, d.h. es existieren abzählbar viele „Rechtecke" $R_n\in\mathfrak{R}$, so daß $\overline{X(f)}=\sum_{n}^{\cdot}R_n$*

(3) $X(f) \in {}^{B}(\mathfrak{R} \times \mathfrak{B})$

(4) $X(f)$ *ist* $\mathfrak{R}$*-Suslinsch, d.h.* $X(f) \in {}^{S}\mathfrak{R}$.

Beweis. Gilt (1), so folgt $\{x: f(x) \gtrless y\} \in \mathfrak{R}$ für jedes $y \in \boldsymbol{R}^1$ und

$$\overline{X(f)} = \{(x, y): f(x) > y\} + \{(x, y): f(x) < y\}$$
$$= \sum_{r \text{ rat.}}{}^{\cdot} (\{x: f(x) > r\}, (-\infty, r]) + \cdots;$$

$\overline{X(f)}$ ist also ein R_σ: Aussage (2).

Aus (2) folgt (3) unmittelbar und aus (3) nach Hilfssatz 2, a) auch (4).

Gilt (4), so ist $X(f) \cdot \{(x, y): y \leqq y_0\} \in {}^{S}\mathfrak{R}$ für jedes $y_0 \in \boldsymbol{R}^1$ und deshalb wegen Hilfssatz 2, b)

$$\{x: f(x) \leqq y_0\} = pr_M \left(X(f) \cdot \{(x, y): y \leqq y_0\}\right) \in {}^{S}\mathfrak{R};$$

daraus folgt mit Hilfssatz 1 wieder (1).

Literatur

[1] Aumann, G.: Reelle Funktionen. Berlin 1954.

[2] Bourbaki, N.: Topologie Générale, Kap. 9. Paris 1958.

[3] Choquet, G.: Theory of capacities. Ann. Inst. Fourier **5** (1953).

[4] — Forme abstraite du théorème de capacitabilité. Ann. Inst. Fourier **9** (1959).

[5] Hahn, H.: Reelle Funktionen, Teil 1. Leipzig 1932.

[6] Richter, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie. Göttingen 1956.

München, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 25. März 1961)

Field Theory Handbook

Including Coordinate Systems Differential Equations and their Solutions

By Professor Dr. PARRY MOON,
Massachusetts Institute of Technology, Cambridge/Mass.,

and Dr. DOMINA EBERLE SPENCER,
University of Cennecticut, Storrs/Conn.

Mit 59 Abbildungen. VIII, 236 Seiten Gr.-8°. 1961. Ganzleinen DM 69,—

In englischer Sprache

CONTENTS

Eleven coordinate systems · Transformations in the complex plane · Cylindrical systems · Rotational systems · The vector Helmholtz equation · Differential equations · Functions · Bibliography · Appendix. Symbols · Author Index and Subject Index.

FOR INFORMATION

This book is a compendium of equations for the physicist and the engineer working with electrostatics, magnetostatics, electric currents, electromagnetic fields, heat flow, gravitation, diffusion, optics, or acoustics. It tabulates the properties of 40 coordinate systems, states the Laplace and Helmholtz equations in each coordinate system, and gives the separation equations and their solutions.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Die Grundlagen der Theorie der Markoffschen Prozesse

Von Dr. E. B. Dynkin,

Professor der Fakultät für Mathematik und Mechanik der Universität Moskau

Ins Deutsche übertragen von Dr. J. Wloka, Wissenschaftlicher Assistent am Institut für Angewandte Mathematik der Universität Heidelberg

(Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Band 108)

XII, 174 Seiten Gr.-8°. 1961. DM 29,80; Ganzleinen DM 33,80

ZUR INFORMATION

Ziel dieses Buches ist die Untersuchung der logischen Grundlagen der Theorie der Markoffschen Zufallsprozesse. Es wird eine allgemeine Theorie aufgebaut, die auch inhomogene Prozesse umfaßt; auch können die hier behandelten Prozesse in einem vom Zufall abhängigen Zeitaugenblick abbrechen. Die weitverbreitete Auffassung eines Markoffschen Prozesses als einer Zufallsfunktion spezieller Form erweist sich für den Aufbau der Theorie als unzulänglich. Tatsächlich hat man es beim Studium Markoffscher Prozesse nicht nur mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß zu tun, sondern mit einem ganzen System derartiger Maße; diese Maße entsprechen allen möglichen Anfangszeitmomenten, sowie allen möglichen Anfangszuständen; anders ausgedrückt: Man hat es nicht nur mit einer einzigen Zufallsfunktion zu tun, sondern mit einem ganzen System derartiger Funktionen, die in bestimmter Weise miteinander zusammenhängen. Dies ist einer der Gründe für die bekannte Autonomie der Markoffschen Prozesse innerhalb der allgemeinen Theorie der Wahrscheinlichkeitsprozesse.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg
Printed in Germany